

РОЗДІЛ VII. Інтегральне числення функції однієї змінної

Невизначений інтеграл

План

1. Поняття первісної.
2. Властивості невизначеного інтеграла.
3. Основні методи інтегрування.

1. Поняття первісної

Функція $F(x)$ називається *первісною* для функції $f(x)$ на проміжку $(a;b)$, якщо для кожного $x \in (a;b)$ виконується рівність $F'(x) = f(x)$.

Приклад. Функція $F(x) = \sin x$ є первісною для функції $f(x) = \cos x$ на $X = (-\infty, +\infty)$, тому що при будь-якому x : $(\sin x)' = \cos x$.

Якщо $F(x)$ – первісна для $f(x)$, то функція $F(x) + C$, де C – деяка стала, також є первісною для функції $f(x)$, тому що $[F(x) + C]' = f(x)$ для будь-якого числа c . Наприклад, для $f(x) = \cos x$ первісною є не тільки $\sin x$, але й функція $\sin x + C$, тому що $(\sin x + C)' = \cos x$.

Означення. Якщо функція $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$, то множина функцій $F(x) + C$, де c – довільна стала, називається *невизначеним інтегралом від функції $f(x)$* й позначається символом

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

При цьому функція $f(x)$ називається *підінтегральною функцією*, $f(x)dx$ – *підінтегральним виразом*, а dx – *диференціал змінної інтегрування*.

Операція знаходження первісних для функції $f(x)$ називається *інтегруванням $f(x)$* . Інтегрування – операція, обернена диференціюванню.

Задача інтегрування функції на проміжку полягає у тому, щоб знайти всі первісні функції на цьому проміжку, або довести, що їх немає.

Теорема (Коші). Для існування невизначеного інтеграла для функції $f(x)$ на певному проміжку достатньо, щоб $f(x)$ була неперервною на цьому проміжку.

2. Властивості невизначеного інтеграла

1. $(\int f(x) dx)' = f(x)$.
2. $d(\int f(x) dx) = f(x) dx$.
3. $\int dF(x) = F(x) + C$.
4. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$.
5. $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$.

3. Основні методи інтегрування

Безпосереднє інтегрування. Обчислення інтегралів за допомогою таблиці найпростіших інтегралів й основних властивостей невизначених інтегралів називається *безпосереднім інтегруванням*.

Таблиця невизначених інтегралів

1. $\int dx = x + C;$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1;$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$
4. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0;$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{|a|} + C, \quad a \neq 0;$
6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1; \quad \int e^x dx = e^x + C;$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C;$
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$
10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C, \quad a \neq 0;$
12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C, \quad a \neq 0;$
13. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad a \neq 0.$

Метод безпосереднього інтегрування. Коли $\varphi(x)$ є лінійною функцією, тобто $\varphi(x) = ax + b$, , дістаємо:

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} \int f(ax + b) \cdot d(ax + b) = \frac{1}{a} F(ax + b) + C..$$

Зауваження. Під знак диференціала можна вносити будь-який сталий доданок (значення диференціала при цьому не зміниться):

Приклад.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x dx}{1 + 3 \cos x} &= \int \frac{d(-\cos x)}{1 + 3 \cos x} = -\frac{1}{3} \int \frac{d(3 \cos x)}{1 + 3 \cos x} = \\ &= -\frac{1}{3} \int \frac{d(1 + 3 \cos x)}{1 + 3 \cos x} = -\frac{1}{3} \ln|1 + 3 \cos x| + C. \end{aligned}$$

Метод підстановки (заміна змінної інтегрування). Мета методу підстановки – перетворити даний інтеграл до такого вигляду, який простіше інтегрувати.

Теорема . Якщо $f(x)$ – неперервна, а $x = \varphi(t)$ має неперервну похідну, то:

$$\int f(x) dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt; \\ t = \varphi^{-1}(x) \end{array} \right| = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Наслідок.

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = |\varphi(x) = t| = \int f(t) dt.$$

Приклад.

$$\int \sin^5 x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{1}{6} \sin^6 x + C.$$

Метод інтегрування частинами. Формулою інтегрування частинами у невизначеному інтегралі називається формула

$$\int u dv = uv - \int v du$$

де u й v – диференційовні функції по x .

На практиці функції $u(x)$ та $v(x)$ рекомендується вибирати за таким правилом: при інтегруванні частинами підінтегральний вираз $f(x) dx$ розбивають на два множники типу $u \cdot dv$, тобто $f(x) dx = u \cdot dv$; при цьому функція $u(x)$ вибирається такою, щоб при диференціюванні вона спрощувалась, а за dv беруть залишок підінтегрального виразу, який містить dx , інтеграл від якого відомий, або може бути просто знайдений.

Приклад.

$$\int x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \int dv = \int \sin x dx \Rightarrow \\ \Rightarrow v = -\cos x \end{array} \right| = -x \cos x - \int -\cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$