Інтегрування функцій

План

1. Основні означення.
2. Інтегрування дробово-раціональних функцій.
3. Методика інтегрування раціональних функцій
4. Інтегрування тригонометричних функцій.
5. Інтегрування деяких ірраціональних функцій.

1. Основні означення

Означення. Відношення двох многочленів $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називається *раціональним дробом.*

Означення. Раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називається *правильним*, якщо степінь многочлена в чисельнику менший від степеня многочлена в знаменнику, тобто $n < m$; якщо $n \ge m$, то дріб називається *неправильним*.

Теорема 5. Будь-який неправильний раціональний дріб можна подати у вигляді суми многочлена (цілої частини) та правильного раціонального дробу.

Всякий правильний правильний дріб можна розкласти на суму простих: I. $\frac{A}{x-a}$; II. $\frac{B}{(x-a)^k}$; III. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$; IV. $\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}$, де $D = p^2 - 4q < 0$, $k \ge 2, k \in N,$. Це роблять методом невизначених коефіцієнтів.

Метод невизначених коефіцієнтів

Метод невизначених коефіцієнтів дає алгоритм для знаходження коефіцієнтів розкладу правильного раціонального дробу на суму простих.

Приклад.

$$\frac{5x^3+3x-9}{(x-6)^2(x+4)\left(x^2+3x+11\right)^3} = \frac{A_1}{(x-6)} + \frac{A_2}{(x-6)^2} + \frac{B}{(x+4)} +$$

$$\frac{M_1x+N_1}{\left(x^2+3x+11\right)} + \frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+3x+11\right)^2} + \frac{M_3x+N_3}{\left(x^2+3x+11\right)^3}.$$

Це приклад розкладу правильного раціонального дробу на суму простих, де A_1, A_2, B, M_i, N_i – невизначені коефіцієнти. Зводимо праву частину рівності до спільного знаменника. Прирівнюємо відповідні коефіцієнти чисельника лівої частини з коефіцієнтами чисельника правої. Отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв’язки її є коефіцієнтами розкладу.

2. Інтегрування дробово-раціональних функцій

I. $\int \frac{Adx}{x-a} = \begin{vmatrix} t = x-a \\ dt = dx \end{vmatrix} = A\int \frac{dt}{t} = A\ln|t| + C = A\ln|x-a| + C.;$

II. $\int \frac{Bdx}{(x-a)^k} = \begin{vmatrix} t = x-a \\ dt = dx \end{vmatrix} = B\int \frac{dt}{t^k} = B\int t^{-k}dt = B\frac{t^{-k+1}}{-k+1} + C =$

$= \frac{A}{1-k}t^{-k+1} + C = \frac{A}{1-k}(x-a)^{-k+1} + C$;

III. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \left| \left(x^2+px+q\right)' = 2x+p \right| \int \frac{\frac{M}{2}(2x+p)+(N-\frac{Mp}{2})}{x^2+px+q}dx =$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

Обчислимо обидва інтеграли. В першому зробимо заміну $t = x^2+px+q$; $dt = 2x+p,$ одержимо інтеграл

$$\int \frac{(2x+p)}{x^2+px+q}dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|x^2+px+q\right| + C.$$

Відносно другого маємо

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + a^2} = \begin{vmatrix} t = x+\frac{p}{2} \\ dt = dx \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{1}{a}arctg\frac{t}{a} + C_1 = \frac{1}{a}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{a} + C_1.$$

Завдяки цьому

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2N-Mp}{2a}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{a} + C.$$

Приклад. Знайти $\int \frac{2x-2}{x^2-4x+8}dx$.

На практиці інтеграли такого типу обчислюють, виділивши в знаменнику повний квадрат $x^2-4x+8 = x^2-4x+4+4 = (x-2)^2+2^2$.

$$\int \frac{2x-2}{x^2-4x+8}dx = \int \frac{2x-2}{(x-2)^2+2^2}dx = \begin{vmatrix} x-2=t \\ x=t+2 \\ dx=dt \end{vmatrix} = \int \frac{2(t+2)-2}{t^2+2^2}dt =$$

$$\int \frac{2t+2}{t^2+2^2}dt = \int \frac{2t}{t^2+2^2}dt + \int \frac{2}{t^2+2^2}dt = \int \frac{d\left(t^2+2^2\right)}{t^2+2^2} + 2\frac{1}{2}arctg\frac{t}{2} + C =$$

$$\ln\left|t^2+4\right| + arctg\frac{t}{2} + C = \ln\left|(x-2)^2+4\right| + arctg\frac{x-2}{2} + C.$$

IV. $\int \frac{(Ax+B)dx}{\left(x^2+px+q\right)^k}$ – інтегрується за допомогою рекурентної формули

$$I_k = \frac{t}{2a^2(k-1)\left(t^2+a^2\right)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2a^2(k-1)} I_{k-1}.$$

3. Методика інтегрування раціональних функцій

1. Якщо підінтегральна функція – неправильний раціональний дріб, то за допомогою ділення його розкладають на суму многочлена та правильного раціонального дробу.

2. Знаменник правильного раціонального дробу розкладають на множники. За виглядом знаменника правильний раціональний дріб подають у вигляді суми найпростіших дробів, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів.

3. Інтегрують цілу частину та найпростіші дроби.

4. Інтегрування тригонометричних функцій

Розглянемо $\int R(\sin x, \cos x)dx$,, де R – раціональна функція відносно sin$x$, cos$x$, тобто над sin$x$, cos$x$ виконуються лише арифметичні дії та піднесення до цілого степеня.

Існують такі підстановки, що за їх допомогою інтеграл $\int R(\sin x, \cos x)dx$ завжди може бути зведений до інтеграла від раціональної функції $\int R^*(t)dt$,, загальну схему інтегрування якої розроблено.

I. Універсальна тригонометрична підстановка $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$.

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \left| \begin{array}{l} \mathrm{tg}\frac{x}{2}=t,\ \ x=2\,\mathrm{arctg}\,t,\ \ dx=\frac{2dt}{1+t^2}; \\ \sin x = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}; \\ \cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int R^*(t)dt.$$

.

Приклад. $\int \frac{dx}{\sin x} = \left| \begin{array}{l} \mathrm{tg}\frac{x}{2} = t, x = 2\,\mathrm{arctg}\,t, \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}; \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\left(1+t^2\right)2dt}{2t\left(1+t^2\right)} =$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Зауваження. На практиці універсальну тригонометричну підстановку використовують, якщо sin *x*, cos *x* входять у невисокому степені (інакше розрахунки будуть дуже складні).

II. Підінтегральна функція – непарна відносно sin *x*, тоді роблять підстановку cos *x* = *t*.

Приклад. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^3 x \cdot \sin x}{\cos^2 x \cdot \sin x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \sin x dx =$

$$= \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \sin x dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = \int \frac{1-t^2}{t^2}(-dt) =$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) dt = t + \frac{1}{t} + C = \cos x + \frac{1}{\cos x} + C.$$

III. Підінтегральна функція – непарна відносно cos *x* раціоналізується за допомогою підстановки sin *x* = *t*.

Приклад. $\int \cos^3 x \sin^2 x dx = \int \cos^3 x \sin^2 x \frac{\cos x}{\cos x} dx =$

$$= \int \cos^2 x \cdot \sin^2 x \cdot \cos x dx = \int \left(1 - \sin^2 x\right) \sin^2 x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| =$$

$$= \int \left(1 - t^2\right) t^2 dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$$

IV. Підінтегральна функція $R(\sin x, \cos x)$ – парна відносно $\sin x$ і $\cos x$ разом, тобто $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$..

У цьому випадку використовують підстановку $\mathrm{tg}\,x = t$ або $\mathrm{ctg}\,x = t$..

V. Підінтегральна функція $R(\mathrm{tg}\,x)$ раціоналізується підстановкою $\mathrm{tg}\,x = t$.

Зауваження. В інтегралах $\int \sin^{2n} x \cdot \cos^{2m} x dx$ рекомендується скористатись формулами пониження степеня:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \;\; \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \;\; \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

Приклад.

$$\int \sin^2 x\cos^2 xdx=\frac{1}{4}\int \sin^2 2x\,dx=\frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2}dx=\frac{1}{8}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C.$$

Зауваження. При інтегруванні інтегралів типу:

$\int \sin(ax)\cdot\cos(bx)dx$, $\int \cos(ax)\cdot\cos(bx)dx$, $\int \sin(ax)\cdot\sin(bx)dx$ $a\neq b$,,

користуються формулами: $\sin(ax)\cdot\cos(bx)=\frac{1}{2}(\sin(a+b)x+\ +\sin(a-b)x)$,

$$\cos(ax)\cos(bx)=\frac{1}{2}\left(\cos(a+b)x+\cos(a-b)x\right),$$

$$\sin(ax)\cdot\sin(bx)=\frac{1}{2}\left(\cos(a-b)x-\cos(a+b)x\right).$$

Приклад.

$$\int \cos 2x\cdot\sin 5x\cdot dx=\frac{1}{2}\int\left(\sin 7x+\sin 3x\right)dx=-\frac{1}{14}\cos 7x-\frac{1}{6}\cos 3x+C.$$

5. Інтегрування деяких ірраціональних функцій

Розглянемо підстановки для інтегрування деяких типів ірраціональних функцій, при цьому символ $R(x;y)$ означає раціональну залежність від змінних x та y.

$$\text{I.}\int R\left(x,\sqrt[n]{(ax+b)^m}\right)dx=\left|\begin{array}{l} ax+b=t^n \\ x=\frac{1}{a}\left(t^n-b\right) \\ dx=\frac{n}{a}t^{n-1}dt\end{array}\right|=\int R\left(\frac{t^n-b}{a},t^m\right)\frac{nt^{n-1}dt}{a}=\int R^*(t)dt.$$

Приклад. $$\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}=\left|\begin{array}{l} x+1=t^3 \\ x=t^3-1 \\ dx=3t^2dt\end{array}\right|=\int\frac{\left(t^3-1\right)3t^2dt}{t^2}=3\int\left(t^3-1\right)dt=$$

$$=\frac{3}{4}t^4-3t+C=\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+1)^4}-\sqrt[3]{x+1}+C.$$

$$\text{II.}\int R\left(x,\sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^m}\right)dx=\left|\frac{ax+b}{cx+d}=t^n\right|=\int R^*(t)dt.$$

Приклад.

$$\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx = \left| \begin{array}{l} \frac{x+1}{x-1} = t^2, x+1 = t^2\left(x-1\right), \\ x = \frac{t^2+1}{t^2-1}; dx = \frac{-4tdt}{\left(t^2-1\right)^2} \end{array} \right| = \int \frac{\left(t^2-1\right)^2 t\left(-4t\right)dt}{\left(t^2+1\right)^2\left(t^2-1\right)^2} =$$

$$= 2\int \frac{t\cdot\left(-2t\right)dt}{\left(t^2+1\right)^2} = \left| \begin{array}{l} u = t, du = dt; \\ \frac{-2tdt}{\left(t^2+1\right)^2} = dv \Rightarrow v = \frac{1}{t^2+1} \end{array} \right| = \frac{2t}{t^2+1} - 2\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{2t}{t^2+1} - 2\operatorname{arctg} t + C = 2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{1}{1+\frac{x+1}{x-1}} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + C =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + C.$$

III. $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx = \left| \frac{ax+b}{cx+d} = t^s,\right.$

$\left. s = HCK\left(n_1, n_2 \ldots, n_k\right)\right| = \int R^*\left(t\right)dt.$

Приклад. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}} = \left| \begin{array}{l} x = t^{12}, 12 = HCK(2,3,4) \\ dx = 12t^{11}dt; t = \sqrt[12]{x} \end{array} \right| = \int \frac{t^6\cdot 12t^{11}dt}{t^8 - t^3} =$

$$= 12\int \frac{t^{14}dt}{t^5-1} = 12\int \frac{t^4\left(t^{10}-1+1\right)dt}{t^5-1} = 12\int\left(t^4\left(t^5+1\right) + \frac{t^4}{t^5-1}\right)dt =$$

$$= 12\left(\frac{t^{10}}{10} + \frac{t^5}{5} + \frac{1}{5}\ln\left|t^5-1\right|\right) + C = \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + \frac{12}{5}\cdot\sqrt[12]{x^5} + \frac{12}{5}\ln\left|\sqrt[12]{x}-1\right| + C.$$