

Тема 7. Ігрові моделі та методи

1. Головні поняття теорії ігор.
2. Класифікація ігор.
3. Матричні ігри двох осіб.
4. Графічний метод розв'язування матричної гри.
5. Розв'язування матричної гри шляхом зведення до задачі лінійного програмування.



Основна література: 4, 6, 7, 11, 18, 19, 23, 26, 31, 44.

Додаткова література: 1, 4, 10.



Ключові слова і поняття: теорія ігор, гра, матричні ігри, конфлікт, біматричні ігри, платіжна матриця.

1. Головні поняття теорії ігор

Теорія ігор – сукупність методів математичного аналізу та оцінки правил поведінки учасників конфліктної ситуації. Кожна *конфліктна ситуація* передбачає взаємодію двох чи більше учасників цієї ситуації (*гравців*) для досягнення кожним з них своєї мети. Протилежні інтереси учасників гри створюють конфліктну ситуацію. Рівень досягнення мети гравцем, тобто кінцевий результат його участі у грі залежить як від непередбачуваних ситуацій, так і від поведінки інших учасників гри. Кожен з учасників гри, зрозуміло, хоче отримати для себе найбільшу вигоду. Результат гри, яку частково контролює кожен з учасників, певною мірою залежить від випадку, а найголовніше – від кмітливості і майстерності гравців. Конфліктні ситуації, до яких можна застосувати теорію ігор, існують як у класичних іграх (шахах, покері та інших), так і в економіці, біології, геології, політиці, військовій справі.

Теорію ігор як математичну дисципліну започатковано одночасно з теорією ймовірностей у середині XVII ст., однак її розвитку практично не відбувалося. Поштовхом до нових розробок у цій галузі була книга Дж. Неймана «До теорії стратегічних ігор» (1928) і книга Дж. Неймана та О. Моргенштерна «Теорія ігор і економічна поведінка» (1944). Теорія ігор з самого початку була спрямована на розв'язок задач щодо прийняття рішень у конкурентній економіці. У зазначених працях містились переважно економічні приклади, економічні конфліктні ситуації.

З часу другої світової війни теорія ігор серйозно зацікавила військових, які наявний математичний апарат застосували для аналізу військових стратегій. Зараз істотно розширилась сфера застосування теорії ігор, до неї тепер належать і соціальні науки.

Теорію ігор використовують з метою визначення вибору стратегій у конфліктних ситуаціях. Сьогодні теорія ігор все ще залишається чистою теорією, сфера використання теорії ігор обмежена, оскільки за умови, що суперників більше двох і правила їхньої поведінки ускладнено, труднощі аналізу різко зростають.

Хоча теорія ігор ще не має практичного значення при вирішенні реальних завдань державного управління, однак уявлення, які вона розвиває, дають змогу керівництву краще розуміти конкурентну обстановку.

Процес аналізу, який спонукає керівника розглядати всі можливі альтернативи як своїх дій, так і дій конкурентів, є надзвичайно корисним.

Ігрове імітування можна здійснювати у формі спеціальних ігор або ігор людини і машини. *Операційна гра* – це спільна робота об'єднаних у групи експертів, які розподіляють між собою ролі, що відповідають діям учасників реальних процесів, та приймають рішення у відповідь на конкретні дії супротивників чи союзників у грі.

Головна мета гри – вироблення практичних рекомендацій щодо дій у різних ситуаціях під час навчання експертів.

Людино-машинні ігри полягають у створенні структури, в якій органічно взаємодіють імітаційна модель певного процесу на ЕОМ та учасники гри.

Загалом операційні та людино-машинні ігри сьогодні широко застосовують з метою моделювання економічних процесів у випадках, коли процес недостатньо вивчений для того, щоб цілковито сформулювати його щодо реалізації на ЕОМ.

Теорія ігор користується методами теорії ймовірностей, функціонального аналізу, теорії диференціальних та інтегральних рівнянь. Вона використовує ті самі методи, що й усі галузі математики: формулювання принципу оптимальності аксіоматичне, пошук розв'язків здійснюють на базі аналітичних розрахунків. Завдяки експериментальним методам дослідження гри може відбуватись на основі багаторазового відтворення гри людьми (ділові ігри) чи з допомогою цифрового моделювання на ЕОМ (ігри автоматів).

Відшукування розв'язків ігор можна здійснити поки що лише у досить вузьких окремих класах ігор. В окремих випадках це можна описати за допомогою формул, а здебільшого його подають у вигляді алгоритмів.

Кількість учасників гри, або кількість *груп інтересів* у грі є одним з базових понять теорії ігор. Ігри двох гравців займають центральне місце в теорії ігор. Їх ще називають *іграми двох гравців з нульовою сумою*, в яких один гравець виграє стільки, скільки програє другий. До таких ігор шляхом

відповідних перетворень можна звести *ігри двох гравців з постійною сумою*, у яких конкуренти намагаються зі зазначеної суми забрати якомога більшу частку. Усі інші ігри кваліфікують як такі, що мають *понад два учасники*.

Учасники гри можуть вступати у *коаліції дій*, множину яких позначають через R . Кожну дію коаліції у грі називають *стратегією*. Це поняття є центральним у теорії ігор. Стратегією гравця є повний перелік усіх дій, які цей гравець застосовує у кожному випадку, що виникає під час гри унаслідок ходу конкурента, свого ходу чи цілком випадково. Виходячи з конкретних обставин, що виникають, стратегія визначає гравцеві хід, який він повинен зробити у цьому випадку.

Наступним базовим поняттям теорії ігор є поняття *функції виграшу* H_k , яка фактично є правилом, визначення сподіваного виграшу першого гравця у випадку вибору ним будь-якої стратегії зі своєї множини допустимої стратегії, а інший гравець вибере будь-яку стратегію зі своєї множини допустимих стратегій. Для коаліції k множину всіх стратегій позначають через S_k .

Вибір кожним учасником гри чи коаліцією дій своєї стратегії створює ситуації, множину яких позначають через S . Зацікавленість у результатах гри стимулює учасників до формування коаліції інтересів, множину яких позначають через R_i . Перевагу ситуації S' над ситуацією S'' для коаліції k записують як $S' > S''$.

У нашому випадку справедливе $H_k^{(S')} > H_k^{(S'')}$. Перелік усіх коаліцій дій, множина їхніх стратегій і ситуацій, коаліції інтересів визначають гру. Очевидно, що у будь-якої гри є понад дві коаліції інтересів.

2. Класифікація ігор

Якщо існує сідлова точка, то дві стратегії, зумовлені нею, називають оптимальними. Можлива наявність обмежень на допустимі змішані стратегії (*гра з обмеженнями*). *Нескінченні ігри* використовують нескінченні множини чистих стратегій.

Багатокрокові ігри задаються на повному наборі інтервалів, кожний з яких є кроком гри. У цьому випадку обоє гравців володіють повною інформацією.

Стохастичні ігри мають ту особливість, що на кожному кроці існує позитивна імовірність зупинки і, незалежно від вибраної стратегії, імовірність того, що через n кроків гра буде продовжуватися, не більша S^n (де S^n – наперед задана, менша від одиниці величина).

У *рекурсивних іграх* імовірність закінчення гри на фіксованому кроці може бути нульовою. Багатокрокові ігри з неперервним часом, у яких

перехід від одного стану до іншого описується диференціальними рівняннями, називають *диференціальними іграми*.

В іграх двох гравців з нульовою сумою інтереси гравців не обов'язково є протилежними, що може дати вигоду обом гравцям за умови узгодженості їхніх дій. Якщо у таких іграх допускають обмін інформацією, спільні стратегії, другорядні платежі, угоди – такі ігри називають *кооперативними*. Якщо такі взаємодії категорично заборонені – це *некооперативні ігри*.

Якщо у грі є лише одна коаліція дій, вважають, що множина ситуацій збігається з множиною стратегій і такі ігри називаються *нестратегічними*.

Якщо множини коаліцій дій і коаліцій інтересів збігаються, то обидва види коаліцій називають гравцями. Вироблення рішення в теорії ігор полягає у виборі коаліції дій чи якоїсь своєї стратегії гравцем, тобто вибору елемента з певної множини. У випадку *динамічних ігор* вибір стратегії відбувається на певному проміжку часу.

3. Матричні ігри двох осіб

У випадку скінченності множини S_1 і S_2 (гра двох гравців) нормальну форму гри можна записати у вигляді матриці $A=(a_{ij})$, у якій елементи рядків – це стратегії першого гравця, а елементи стовпців – стратегії другого гравця. Елементи a_{ij} матриці A є платою другого гравця першому у випадку вибору першим гравцем i -ого рядка, а другим гравцем – j -го стовпця. Якщо відомі всі значення a_{ij} , то можна записати платіжну матрицю гри (табличне подання функції виграшу, таблиця 7.3.1).

Таблиця 7.3.1

	B_1	B_2	..	B_j	..	B_n	L
A_1	a_{11}	a_{12}	..	a_{1j}	..	a_{1n}	L_1
A_2	a_{21}	a_{22}	..	a_{2j}	..	a_{2n}	L_2
..	..	..	..	..	..	..	..
A_i	a_{i1}	a_{i2}	..	a_{ij}	..	a_{in}	L_i
..	..	..	..	..	..	..	..
A_m	a_{m1}	a_{m2}	..	a_{mj}	..	a_{mn}	L_m
β	β_1	β_2	..	β_j	..	β_n	

Очевидно, перший гравець вибирає рядок з метою максимізувати плату (свій виграш), а другий гравець вибирає стовпець з метою мінімізувати плату (свій програш). Таку гру називають *матричною*.

Тобто перший гравець намагатиметься спочатку вибрати мінімальне значення виграшу за кожною із стратегій

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}, \quad i = \overline{1, m}.$$

А потім серед цим виграшів шукатиме той, який забезпечує максимум:

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Величину α називають *нижньою чистою ціною гри* або мінімаксом. Їй відповідає максимінна стратегія, дотримання якої першим гравцем за будь-яких стратегій другого гравця, гарантує для нього виграш, не менший ніж α . Тобто це гарантований виграш першого гравця за умови будь-яких стратегій другого гравця.

У свою чергу, другий учасник максимізує свій програш по кожній стратегії

$$\beta_j = \max_i a_{ij}, \quad j = \overline{1, n}.$$

А потім серед усіх стратегій вибирає ту, при якій програш найменший:

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Величину β називають *верхньою чистою ціною гри* (мінімаксом). Їй відповідає мінімаксна стратегія другого гравця, дотримання якої за умови будь-якої стратегії першого гравця, забезпечує йому програш, не більший ніж β . Тобто це гарантований програш другого гравця за умови будь-яких стратегій першого гравця.

Оптимальним розв'язком цієї гри є *сідлова точка*, тобто елемент a_{kl} матриці A , який задовольняє умову $a_{il} \leq a_{kl} \leq a_{kj}$ для будь-яких i та j .

Якщо $\beta = \alpha$, тобто верхня ціна гри дорівнює нижній ціні гри, то відповідні чисті стратегії називають оптимальними, а про гру кажуть, що вона має *сідлову точку*.

У більшості матричних ігор відсутні сідлові точки, тобто не виконується умова:

$$\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_i \max_j a_{ij}$$

У таких випадках використовують *змішані стратегії*, які є схемою випадкового вибору чистих стратегій.

Змішаною стратегією S_A першого гравця називають застосування чистих стратегій $A_1, A_2, \dots, A_m$ з ймовірностями $p_1, p_2, \dots, p_m$, причому

$$\sum_{i=1}^m p_i = 1, \quad p_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Змішані стратегії гравця A запишемо у вигляді матриці:

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_i & \dots & A_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_i & \dots & p_m \end{pmatrix}. \text{ Або у вигляді рядка } S_A = (p_1, p_2, \dots, p_m).$$

Аналогічно змішані стратегії гравця B позначимо

$$S_B = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_i & \dots & A_m \\ q_1 & q_2 & \dots & q_i & \dots & q_m \end{pmatrix}. \text{ Або у вигляді рядка } S_B = (q_1, q_2, \dots, q_m), \text{ де}$$

$$\sum_{j=1}^n q_j = 1, q_j \geq 0, j = \overline{1, n}.$$

Гравець A вибирає стратегію так, щоб максимізувати найменший сподіваний виграш по стовпцях платіжної матриці, а гравець B вибирає стратегію так, щоб мінімізувати найбільший сподіваний виграш по стовпцях. Отже, гравець A вибирає стратегію p_i :

$$\max_{p_i} \left\{ \min \left(\sum_{i=1}^m a_{i1} \cdot p_i, \sum_{i=1}^m a_{i2} \cdot p_i, \dots, \sum_{i=1}^m a_{in} \cdot p_i \right) \right\}$$

Гравець B вибирає стратегію q_j :

$$\min_{q_j} \left\{ \max \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} \cdot q_j, \sum_{j=1}^n a_{2j} \cdot q_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{mj} \cdot q_j \right) \right\}$$

Якщо стратегії оптимальні, то виконується рівність між максимінним сподіваним виграшем та мінімаксом сподіваним програшем.

4. Графічний метод розв'язування матричної гри

Гра $2 \times N$ задається платіжною матрицею, що подана у таблиці 7.4.1.

Таблиця 7.4.1

	B_1	B_2	..	B_j	..	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	..	a_{1j}	..	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	..	a_{2j}	..	a_{2n}

Гравець A має дві чисті стратегії, а гравець B – n чистих стратегій.

Алгоритм геометричного (графічного) знаходження оптимальних стратегій гравця A та ціни гри v :

1. Відміряємо горизонтальний відрізок $[0, 1]$. Через кінці відрізка проводимо два перпендикуляри. На лівому перпендикулярі як на числовій осі відкладаємо елементи першого рядка платіжної матриці. На правому перпендикулярі аналогічно відкладаємо всі елементи другого рядка платіжної матриці. Масштаб на лівому та правому перпендикулярах

однаковий, хоча може не збігатися із масштабом горизонтального одиничного відрізка.

2. З'єднуємо відрізками кожну пару точок, що відповідають стратегії гравця B , тобто в платіжній матриці відображені у стовпцях.

3. Виділяємо нижню частину сімейства відрізків, яка в загальному випадку буде мати вигляд ламаної, а у окремому випадку може бути прямою.

4. Знаходимо на цій ламаній максимальну (найвищу) точку (точки). Абсциса цієї точки є ймовірністю p^0 вибору гравцем A чистої стратегії A_2 в оптимальній змішаній стратегії $P^0 = (1-p^0, p^0)$. Ордината точки є ціною гри v .

Гра $N \times 2$ задається платіжною матрицею, що подано в таблиці 7.4.2.

У цьому випадку гравець A має m чистих стратегій, а гравець B – дві чисті стратегії.

Таблиця 7.4.2 Платіжна матриця

	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}
...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}

Алгоритм геометричного (графічного) знаходження оптимальних стратегій гравця B та ціни гри v :

1. Відміряємо горизонтальний відрізок $[0, 1]$. Через кінці відрізка проводимо два перпендикуляри. На лівому перпендикулярі як на числовій осі відкладаємо елементи першого стовпця платіжної матриці. На правому перпендикулярі аналогічно відкладаємо всі елементи другого стовпця платіжної матриці. Масштаб по обох перпендикулярах, знову ж таки, однаковий.

2. З'єднуємо відрізками кожну пару точок, що відповідають стратегії гравця A , тобто в платіжній матриці відображені у рядках. Отримуємо m відрізків.

3. Виділяємо верхню частину сімейства відрізків, яка в загальному випадку буде мати вигляд ламаної, а в окремому випадку може бути прямою.

4. Знаходимо на цій ламаній мінімальну (найнижчу) точку (точки). Абсциса мінімальної точки є ймовірністю q^0 вибору гравцем B чистої стратегії B_2 в оптимальній змішаній стратегії $Q^0 = (1-q^0, q^0)$. Ордината мінімальної точки є ціною гри v .

5. Розв'язування матричної гри шляхом зведення до задачі лінійного програмування

Розглянемо матричну гру $(m \cdot n)$, яка задана платіжною матрицею A з елементами $\|a_{ij}\|_{m \times n}$, $a_{ij} > 0$. Оптимальна змішана стратегія гравця A – $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$, а гравця B – $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$. Відомо, що для оптимальної стратегії першого гравця та ціни гри v виконується нерівність $\sum_{i=1}^m a_{ij} p_i \geq v$, $j = \overline{1, n}$. Можемо припустити, що ціна гри v невід'ємна, чого завжди можна досягти, збільшивши ціну гри на деяке стає число. Поділивши обидві частини останньої нерівності на ціну гри, отримаємо:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \frac{p_i}{v} \geq 1, \quad j = \overline{1, n}.$$

Нехай $\frac{p_i}{v} = y_i$, тоді

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq 1, \quad j = \overline{1, n}, \quad y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Оскільки для змішаних стратегій виконувалось $\sum_{i=1}^m p_i = 1$, то тепер

умова набуде вигляду $\sum_{i=1}^m y_i = \frac{1}{v}$.

Оскільки перший гравець прагне максимізувати свій виграш, то він повинен забезпечити мінімум величині $\frac{1}{v}$. З урахуванням цього, визначення оптимальної стратегії першого гравця зводиться до розв'язування оптимізаційної задачі лінійного програмування:

$$\min F; \quad F = \sum_{i=1}^m y_i$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq 1, \quad j = \overline{1, n};$$

$$y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

За аналогією визначення оптимальної стратегії другого гравця зводиться до знаходження розв'язку задачі лінійного програмування:

$$\max G; \quad G = \sum_{j=1}^n x_j$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq 1, \quad i = \overline{1, m};$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

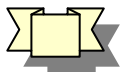
Таким чином, щоб знайти розв'язок гри, що задана матрицею A , необхідно розв'язати пару двоїстих задач.

Оптимальна змішана стратегія гравця А: $p_i^* = v \cdot y_i^* \quad (i = \overline{1, m})$.

Оптимальна змішана стратегія гравця В: $q_j^* = v \cdot x_j^* \quad (j = \overline{1, n})$.

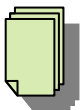
Етапи розв'язування матричної гри шляхом зведення до задачі лінійного програмування:

- 1) записати пару двоїстих задач лінійного програмування, еквівалентних заданій матричній грі;
- 2) визначити оптимальні плани пари двоїстих задач;
- 3) використовуючи співвідношення між планами пари двоїстих задач та оптимальними стратегіями і ціною гри, знайти її оптимальний розв'язок.



Контрольні питання

1. У чому полягає роль теорії?
2. Надайте характеристику класифікацій ігор.
3. Що називають конфліктом? Стратегією гри?
4. Яке значення мають задачі теорії ігор при розв'язанні сучасних економічних задач?



Теми рефератів

1. Прикладне значення теорії ігор.
2. Використання методів теорії ігор на практиці.