

ВКАЗІВКИ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАВДАНЬ ТА ДЕЯКІ ДОПОМІЖНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Загальна математична постановка задачі стохастичного програмування

Типову задачу математичного програмування в детермінованій постановці формують так: визначити вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, для компонент якого:

$$\max(\min) F = f(X),$$

$$q_i(X) \leq 0 \quad (i = \overline{1, m}),$$

$$X \geq 0.$$

Якщо функції в даній задачі крім керованих параметрів X залежать ще і від деяких випадкових величин $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, то маємо **задачу стохастичного програмування**:

$$\max(\min) F = f(X, \omega),$$

$$q_i(X, \omega) \leq 0 \quad (i = \overline{1, m}),$$

$$X \geq 0, \quad \omega \in \Omega,$$

де Ω — простір подій ω .

Залежно від можливості отримати та врахувати інформацію стосовно детермінованості (стохастичності) функцій $f(X, \omega)$, $q_i(X, \omega)$ постановки задач стохастичного програмування можуть містити:

- I) стохастичні коефіцієнти цільової функції та детерміновані обмеження;
- II) детерміновані коефіцієнти цільової функції та стохастичні вільні члени і коефіцієнти системи обмежень;
- III) стохастичні коефіцієнти цільової функції, вільні члени і коефіцієнти системи обмежень.

Конкретні постановки задач стохастичного програмування мають свою специфіку. Передусім необхідно визначити:

1. Детермінованим чи випадковим є вектор X . Якщо вектор X є детермінованим, то він не залежить від випадкових параметрів моделі. Якщо ж він випадковий, то тоді X є функцією від ω — $X(\omega)$, тобто залежить від випадкових змінних.

2. Як розуміти максимізацію (мінімізацію) цільової функції — як абсолютну (для всіх значень $\omega \in \Omega$) чи як максимізацію її математичного сподівання або деякої іншої ймовірнісної характеристики цієї функції (моди, медіани), або як мінімізацію середнього квадратичного відхилення? Наприклад, що краще мати: платню 500 ± 200 чи 450 ± 50 ? У першому разі платня може змінюватися в межах від 300 до 700 гривень, а у другому — лише від 400 до 500.

3. Як виконуються обмеження: абсолютно для всіх $\omega \in \Omega$ чи в середньому, або з допустимими порушеннями, ймовірність яких мала?

При постановці задач стохастичного програмування необхідно виходити не лише з математичних міркувань, а й з економічного змісту та з врахуванням евристичних міркувань. Наприклад, детермінованість чи стохастичність вектора X зумовлюється сутністю економічних, технологічних процесів тощо. Для сільськогосподарського підприємства, наприклад, вектор, що визначатиме площі посіву сільськогосподарських культур, обов'язково має бути детермінованим. Якщо ж шуканий вектор для того самого підприємства за тих самих умов визначатиме, приміром, обсяги кредитів, то його компоненти мають бути стохастичними величинами, бо достеменно невідомо, чи вони будуть отримані.

Методи розв'язування стохастичних задач поділяють на дві групи — прямі та непрямі.

Прямі методи використовують для розв'язування задач стохастичного програмування, коли існують способи побудови функцій $f(X, \omega)$ і $g_i(X, \omega) \leq 0, i = \overline{1, m}$ на базі інформації щодо параметра ω . Непрямими є методи зведення стохастичної задачі до задачі лінійного чи нелінійного програмування, тобто перехід до детермінованого аналога задачі стохастичного програмування.

Особливості математичної постановки задач стохастичного програмування

В задачах детермінованого характеру за певним набором початкових даних однозначно визначається вигляд цільової функції та обмежень задачі. У стохастичному програмуванні особливості побудови математичних моделей задач

пов'язані з можливостями вибору виду функції мети та обмежень, тобто за одного набору початкових значень можна отримати математичні моделі, що суттєво відрізнятимуться, а отже, значні розбіжності матимуть і отримані за ними оптимальні плани. Розглянемо основні відмінності будови математичних моделей задач стохастичного програмування.

Довільна математична модель задачі математичного програмування складається з двох частин: цільової функції і обмежень. У задачах стохастичного програмування важливим є вибір як виду цільової функції так і виду обмежень. Цільова функція визначає ефективність функціонування і розвитку економічної системи. Якщо відомі основні характеристики випадкових параметрів задачі, то цільовою функцією може бути:

- максимізація математичного сподівання відповідного економічного показника (прибутку, рівня рентабельності тощо); в такому разі задачі мають назву *M*-моделей;
- мінімізація дисперсії деякого економічного показника за умови обмеження на певному бажаному рівні середньої величини того ж показника, тоді задачі мають назву *V*-моделей;
- ймовірність перевищення (неперевищення) економічним показником певного фіксованого рівня (порога), тоді задача належить до *P*-моделей.

Обмеження в стохастичних економіко-математичних моделях можуть також задаватися різними способами, а значить, отримані оптимальні плани будуть мати відповідний рівень ймовірності їх виконання. При цьому потрібно брати до уваги як внутрішню невизначеність (технологічних процесів), так і невизначеність зовнішнього середовища (постачання сировини, попиту на вироблену продукцію, загальної суми податків тощо).

Нехай задано обмеження задачі математичного програмування в загальному вигляді:

$$g(X, \omega) \leq 0. \quad (1)$$

Неможливість, а іноді й недоцільність вимоги, щоб знайдене рішення задовольняло обмеження (1) за будь-яких реалізацій випадкових параметрів $\omega \in \Omega$, породжує таку ідею: накласти дещо менш жорсткі умови, зокрема замість (1) можна допускати невиконання умов з певною ймовірністю. Наприклад:

$$P\{g(X, \omega) > 0\} \leq \gamma, \quad (2)$$

або

$$P\{g(X, \omega) \leq 0\} \geq 1 - \gamma. \quad (3)$$

Обмеження (2) трактується так: ймовірність того, що $g(X, \omega) > 0$, не перевищує величину γ . Відповідно вираз (3) гарантує, що з ймовірністю $1 - \gamma$ буде виконуватися обмеження (1). Наприклад, якщо $\gamma = 0,05$, то обмеження у 95 випадках із 100 буде виконуватися і тільки у п'яти випадках не буде виконуватися.

Крім того, система обмежень задачі може бути змішаною, тобто частина обмежень може виконуватися в середньому, частина — в жорсткій постановці, а частина — з деякою ймовірністю.

Наведемо кілька варіантів постановок задач стохастичного програмування.

Нехай $f(X, \omega)$ — функція, яка виражає ефективність плану для заданих X та ω . Тоді задачу визначення оптимального детермінованого плану X за випадкових параметрів ω можна сформулювати у таких варіантах:

$$a) \max Mf(X, \omega), \quad (4)$$

за умов:

$$P\{g(X, \omega) \leq 0\} \geq 1 - \gamma; \quad (5)$$

$$X \geq 0, \quad \omega \in \Omega; \quad (6)$$

$$b) \max \xi \quad (7)$$

за умов:

$$P\{f(X, \omega) \geq \xi, g(X, \omega) \leq 0\} \geq 1 - \gamma; \quad (8)$$

$$X \geq 0, \quad \omega \in \Omega. \quad (9)$$

Отже, за постановки задачі варіанту а) необхідно максимізувати середню сподівану ефективність за умов, що обмеження, наприклад, щодо ресурсів, виконання контрактів тощо виконуються з імовірністю $1-\gamma$. За постановки задачі варіанту б) крім цього вимагається, щоб значення функції ефективності, наприклад, прибутку було не менше величини ξ з імовірністю $1-\gamma$, а також, щоб величина ξ була максимальною. Зазначимо, що перевага варіанту а) полягає у тому, що він простіший стосовно обчислення.

Оскільки у моделі (4) – (6) як критерій оптимальності використано математичне сподівання $f(X, \omega)$, то маємо M -модель, а плани, отримані за такою моделлю, називають M -планами.

Зрозуміло, що можна формулювати задачі стохастичного програмування також і по-іншому, поєднуючи або комбінуючи у певний спосіб умови наведених вище першої та другої моделей. Так, приміром, задача стохастичного програмування може мати такий вигляд:

$$P\{f(X, \omega) \geq \alpha\} \rightarrow \max ,$$

за умов:

$$M(g_i(X, \omega)) \leq 0 \quad (i = \overline{1, k}; k < m);$$

$$g_i(X, \omega) \leq 0 \quad (i = \overline{k+1, m});$$

$$X \geq 0 \quad \omega \in \Omega .$$

Отже, очевидно, що конкретних постановок задач стохастичного програмування досить багато і вибір певного їх виду для розв'язування практичних задач залежить від конкретних умов задачі, наявної інформації та мети дослідження.

Постановка задачі стохастичного програмування істотно залежить також від того, чи є можливість під час вибору (прийняття) рішень уточнювати стан економічного середовища (природи) на підставі певних спостережень.

Відомо, що для економічних систем розробляють стратегічні та тактичні плани. Розробляючи стратегічні плани, враховують всі можливі значення ω , тобто стан зовнішнього та внутрішнього середовища, та приймають рішення щодо траєкторії розвитку системи. Однак зустрічаються задачі, коли є можливість провести

спостереження над ω (у певний момент стан економічного середовища стає відомим) і вибрати розв'язок з урахуванням результатів спостережень. Наприклад, плануючи виробничу діяльність підприємства, рішення щодо обсягів випуску продукції приймаються з урахуванням дослідження поточного стану структури ринку. Тоді розробляють тактичний план, тобто знаходять рішення $X(\omega)$ при заданому $\omega \in \Omega$, тобто розв'язують задачу:

$$\max f(X(\omega)),$$

за умов:

$$g_i(X(\omega)) \leq 0; \quad i = \overline{1, m},$$

$$X(\omega) \geq 0.$$

У загальному випадку спостереження уможливають неповне описування стану середовища, а тому етапи вибору рішень можуть чергуватися з етапами спостережень за станом зовнішнього середовища. Отже, відбуваються багатоетапні процеси вибору рішень у такій послідовності:

рішення — спостереження — рішення — спостереження...

або

спостереження — рішення — спостереження — рішення...

Якщо ряд розв'язків починається зі слова «рішення» і воно зустрічається N раз, то модель називають N -етапною задачею (моделлю) стратегічного стохастичного програмування, а якщо зі слова «спостереження» — то задачею (моделлю) тактичного стохастичного програмування.

Кожен з N етапів у свою чергу також може бути поділений. У такому разі маємо одноетапні чи двоетапні задачі стохастичного програмування.

Одноетапна задача стохастичного програмування використовується в тому разі, коли рішення приймаються на підставі відомих характеристик розподілу ймовірностей випадкових параметрів умови задачі до спостережень за їхніми реалізаціями. У такому разі має прийматися найкраще в середньостатистичному розумінні рішення. Тобто випадкові параметри задачі замінюють їх середніми

величинами і початкову задачу стохастичного програмування зводять до детермінованої.

Двохетапна задача стохастичного програмування виникає тоді, коли процес прийняття рішення поділяють на два етапи.

На першому етапі вибирається попередній план, який задовольняє умови задачі за будь-якої реалізації випадкових параметрів. На другому етапі розраховується величина компенсації відхилень розробленого плану від фактичних значень, що були визначені після спостереження за реалізацією випадкових параметрів. Оптимальний план задачі визначають так, щоб забезпечити мінімум середнього значення загальних витрат, які виникають на обох етапах розв'язування задачі. Для існування розв'язку двоетапної задачі вибір плану на першому етапі має гарантувати існування плану-компенсації.

Приклад. Побудуємо математичну модель відомої задачі про визначення оптимального виробничого плану в термінах стохастичного програмування. Необхідно розрахувати оптимальний план виробництва трьох видів продукції $X = (x_1, x_2, x_3)$, за якого максимізується загальний прибуток підприємства. Для спрощення розглянемо використання лише двох видів ресурсів, обсяги яких відомі: $b_1 = 550$ од., $b_2 = 205$ од. Прибуток від реалізації одиниці j -го виду продукції c_{kj} ($k, j = \overline{1,3}$) є випадковим, але відомі ймовірності одержання k -ої величини прибутку від реалізації одиниці j -го виду продукції p_{kj} ($k, j = \overline{1,3}$). Норми витрат i -го виду ресурсу на одиницю j -го виду продукції a_{ij} ($i = \overline{1,2}; j = \overline{1,3}$) детерміновані. Початкові дані наведені в таблицях:

Прибуток від одиниці першого виду продукції, ум. од. (c_{k_1})	Ймовірність (p_{k_1})
10	0,3
13	0,4
15	0,3

Таблиця 2

Прибуток від одиниці другого виду продукції, ум. од. (c_{k_2})	Ймовірність (p_{k_2})
12	0,2
15	0,5
13	0,3

Таблиця 3

Прибуток від одиниці третього виду продукції, ум. од. (c_{k_3})	Ймовірність (p_{k_3})
12	0,3
11	0,5
14	0,2

Таблиця 4

Вид продукції	Норма витрат ресурсів на виготовлення одиниці продукції, ум. од.	
	першого виду	другого виду
Перший	5	1
Другий	4	2
Третій	3	1,5

Розв'язання.

Як зазначалось, математична постановка задачі стохастичного програмування може бути подана в різних варіантах залежно від вигляду цільової функції. Розглянемо кілька можливих варіантів постановок для умов даної задачі.

I варіант.

Цільова функція залежить від випадкової величини, отже, математична модель даної задачі має вигляд:

$$\max F = C(\omega)X,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq b_2; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j=\overline{1,3}).$$

Маємо одноетапну задачу стохастичного програмування з випадковими параметрами цільової функції. Очевидно, що величина F є також випадковою величиною з законом розподілу ймовірностей $N(\bar{F}, \sigma_F^2)$, де $\bar{F}$ — математичне сподівання, а σ_F^2 — дисперсія.

Щоб розв'язати таку задачу, необхідно знайти математичне сподівання $\bar{F}$.

Позначимо символами $M(c_j)$, $j=\overline{1,3}$ — математичне сподівання прибутку від j -го виду продукції, тоді математична модель набуває вигляду:

$$\max \bar{F} = M(c_1)x_1 + M(c_2)x_2 + M(c_3)x_3 = M(C^T(\omega)X),$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq b_2; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j=\overline{1,3}).$$

У наведеній постановці маємо одноетапну задачу стохастичного програмування з M -моделлю, оскільки цільова функція є математичним сподіванням випадкової величини (прибутку).

Оскільки випадкова величина прибутку є дискретною і відомі значення відповідних ймовірностей p_{kj} ($k=\overline{1,3}; j=\overline{1,3}$), то можна безпосередньо обчислити значення $M(c_j)$ ($j=\overline{1,3}$). Отже, в числовому вигляді маємо:

$$M(c_1) = \sum_{k=1}^3 c_{k1} p_{k1} = c_{11} p_{11} + c_{21} p_{21} + c_{31} p_{31} = 10 \cdot 0,3 + 13 \cdot 0,4 + 15 \cdot 0,3 = 12,7;$$

$$M(c_2) = \sum_{k=1}^3 c_{k2} p_{k2} = c_{12} p_{12} + c_{22} p_{22} + c_{32} p_{32} = 12 \cdot 0,2 + 15 \cdot 0,5 + 13 \cdot 0,3 = 13,8;$$

$$M(c_3) = \sum_{k=1}^3 c_{k3} p_{k3} = c_{13} p_{13} + c_{23} p_{23} + c_{33} p_{33} = 12 \cdot 0,3 + 11 \cdot 0,5 + 14 \cdot 0,2 = 11,9.$$

Математична модель задачі набуває такого вигляду:

$$\max F = 12,7x_1 + 13,8x_2 + 11,9x_3,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 550; \\ x_1 + 2x_2 + 1,5x_3 \leq 205; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j=1,3).$$

Початкова задача зведена до задачі лінійного програмування, яку можна розв'язати симплексним методом, але оптимальний план детермінованої задачі є наближеним розв'язком початкової стохастичної.

Оптимальним планом є $X_1^* = (x_1^* \approx 46,67; x_2^* = 0; x_3^* \approx 105,56)$, причому прибуток становить $F_{\max} \approx 1848,78$.

II варіант.

Отриманий розв'язок може бути основою плану виробництва продукції за даних умов. Однак очевидно, що, оскільки значення випадкових величин були замінені їх математичним сподіванням, то розв'язок задачі знайдено як деяке усереднення всіх можливих за даних умов розв'язків. Для деякого набору фіксованих умов розрахований план може виявитись неоптимальним, тобто справжнє значення прибутку буде значно відрізнятися від очікуваного рівня. Якщо, наприклад, зовнішні умови складаються найнесприятливіше (мінімальні рівні прибутків для кожного з видів продукції), то значення цільової функції для відшуканого оптимального плану буде дорівнювати:

$$F(c_{j\min}) = 10 \cdot 46,67 + 11 \cdot 105,56 = 1627,86.$$

Очевидно, що відхилення даного значення від середнього очікуваного рівня ($1848,78 - 1627,86 = 220,92$) показує можливе завищення прибутку у плані. Відомо, що однією з головних характеристик відхилення значень випадкової величини від її середнього є дисперсія. Розрахуємо значення дисперсії для отриманого оптимального плану:

$$\begin{aligned} D_F &= \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + \sigma_3^2 x_3^2 = \\ &= 3,81 \cdot (46,67)^2 + 1,56 \cdot 0 + 1,29 \cdot (105,56)^2 = 22672,88. \end{aligned}$$

Середнє квадратичне відхилення дорівнює $\sigma_F = \sqrt{D_F} = \sqrt{22672,88} = 150,58$.

Якщо допустити, що випадкова величина має нормальний закон розподілу, то, враховуючи властивості середнього квадратичного відхилення (правило трьох «сігм»), визначимо межі, в яких змінюватиметься прибуток: $\bar{F} \pm 3\sigma_F = 1848,78 \pm 451,74 = [1397,04; 2300,52]$. Якщо розраховані зміни прибутку не можуть влаштувати особу, що приймає рішення, то доцільно ввести обмеження, яке зменшить ризик втрати доходу.

За необхідності зменшення можливих втрат прибутку в систему обмежень вводять умову, що дисперсія прибутку має не перевищувати деякої заданої величини. Розв'яжемо задачу з додатковою умовою, що дисперсія має не перевищувати 5000.

$$\max F = 12,7x_1 + 13,8x_2 + 11,9x_3,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 550; \\ x_1 + 2x_2 + 1,5x_3 \leq 205; \\ 3,81x_1^2 + 1,56x_2^2 + 1,29x_3^2 \leq 5000; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,3}).$$

Ця задача є нелінійною. Розв'язавши її, маємо такий оптимальний план:

$X_2^* = (x_1^* = 14,23; x_2^* = 37,78; x_3^* = 39,39)$, причому прибуток $F = 1170$ буде змінюватися приблизно на 210 ум. од. (оскільки $\sigma_F = \sqrt{D_F} \approx 70,7$).

III варіант.

Застосування інструментарію математичного програмування до розв'язання економічних задач уможливорює врахування найвибагливіших побажань стосовно набору властивостей розроблюваних планів. Допустимо, що необхідно, орієнтуючись на деякий середній рівень прибутку, досягти мінімального рівня можливих його змін. У такому разі доречно використати V-модель задачі стохастичного програмування:

$$\min Z = D_F = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 + \sigma_3^2 x_3^2,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq b_2; \\ M(c_1)x_1 + M(c_2)x_2 + M(c_3)x_3 \geq W; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,3}),$$

де W — бажаний рівень сподіваного прибутку.

Зафіксуємо бажаний прибуток на рівні не нижче, ніж 1500 ум. од., і знайдемо оптимальний план такої задачі:

$$\min Z = D_F = 3,81x_1^2 + 1,56x_2^2 + 1,29x_3^2,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 550; \\ x_1 + 2x_2 + 1,5x_3 \leq 205; \\ 12,7x_1 + 13,8x_2 + 11,9x_3 \geq 1500; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,3}).$$

Розв'язавши цю задачу квадратичного програмування, маємо:

$X_3^* = (x_1^* \approx 18,24; x_2^* \approx 48,4; x_3^* \approx 50,47)$, мінімальна дисперсія сподіваного прибутку буде дорівнювати $Z = \min D_F = 8206,125$, тобто зміни прибутку відбуватимуться в межах ± 270 ум. од.

Вибір одного з наведених варіантів математичних моделей залежатиме від конкретної ситуації, поставлених цілей та вимог, однак наведений приклад показує, що використання стохастичних задач дає математично обґрунтовану інформацію, яка може бути основою прийняття рішень за складних реальних умов.

Одноетапні задачі стохастичного програмування

Розглянемо лінійну одноетапну задачу стохастичного програмування в такій постановці: визначити план X , для якого

$$\max M \left\{ \sum_{j=1}^n c_j(\omega) x_j \right\},$$

$$P \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega) x_j \leq b_i(\omega) \right\} \geq p_i \ (i = \overline{1, m}),$$

$$x_j \geq 0, \omega \in \Omega \ (j = \overline{1, n}),$$

де вектор коефіцієнтів при змінних у цільовій функції $C(\omega) = (c_j(\omega)) \ (j = \overline{1, n})$, матриця коефіцієнтів при змінних у системі обмежень $A(\omega) = (a_{ij}(\omega)) \ (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$, а також вектор $B(\omega) = (b_i(\omega)) \ (i = \overline{1, m}) \in$ випадковими величинами; ω — випадковий параметр, Ω — множина значень ω , що з'являються з певною ймовірністю. Нехай $A(\omega)$ — нормально розподілена випадкова величина з математичним сподіванням $\bar{a}_{ij}$ і дисперсією σ_{ij}^2 , а

$B(\omega)$ і $C(\omega)$ — нормально розподілені випадкові величини з математичними сподіваннями відповідно $\bar{b}_i$ та $\bar{c}_j$ і дисперсіями σ_i^2, σ_j^2 .

Оскільки в обмеженнях задачі виду $\sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega)$ ($i=\overline{1, m}$) матриця $A(\omega)$ та вектор $B(\omega)$ є нормально розподіленими випадковими величинами, то їх різниці $\Delta_i(X) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega)x_j - b_i(\omega)$ ($i=\overline{1, m}$) також є випадковими величинами з нормальним розподілом, математичним сподіванням $\bar{\Delta}_i(X) = \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij}x_j - \bar{b}_i$ ($i=\overline{1, m}$) і дисперсією $\sigma_i^2 = \sum \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \theta_i^2$.

Обмеження $P\left\{\sum_{j=1}^n a_{ij}(\omega)x_j \leq b_i(\omega)\right\} \geq p_i$ ($i=\overline{1, m}$) еквівалентні нерівностям $P\{\Delta_i(X) \leq 0\} \geq p_i$ ($i=\overline{1, m}$). Враховуючи, що $\Delta_i(X)$ нормально розподілена випадкова величина, використаємо функцію нормального закону розподілу, внаслідок чого наведену нерівність можна записати так:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i(X)} \int_{-\infty}^0 \exp\left\{-\frac{(\xi - \bar{\Delta}_i(X))^2}{2\sigma_i^2(X)}\right\} d\xi \geq p_i \quad (i=\overline{1, m}).$$

Позначимо: $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi$. Тоді останню нерівність зведемо до вигляду:

$$\Phi\left(-\frac{\bar{\Delta}_i(X)}{\sigma_i(X)}\right) \geq p_i, \text{ звідки } \bar{\Delta}_i(X) + \Phi^{-1}(p_i)\sigma_i(X) \leq 0.$$

Підставивши в цю нерівність значення $\bar{\Delta}_i(X)$ і $\sigma_i(X)$, отримаємо:

$$\Phi^{-1}(p_i) \sqrt{\sum_{j=1}^n \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \theta_i^2} \leq \bar{b}_i - \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} x_j \quad (i=\overline{1, m}).$$

Отже, початкову стохастичну задачу зведено до детермінованого аналогу з лінійною цільовою функцією та нелінійними обмеженнями:

$$\max F = \sum_{j=1}^n \bar{c}_j x_j$$

за умов:

$$\Phi^{-1}(p_i) \sqrt{\sum_{j=1}^n \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \theta_i^2} \leq \bar{b}_i - \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} x_j \quad (i=\overline{1, m}).$$

Таку задачу можна розв'язати одним з відомих методів розв'язування задач нелінійного програмування, наприклад, методом множників Лагранжа.

Розглянемо одноетапну задачу стохастичного програмування, що задана P -моделлю. Отже, маємо задачу виду:

$$\min F = k$$

за умов:

$$P\left\{\sum_{j=1}^n c_j x_j \leq k\right\} = p_0;$$

$$P\left\{\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i\right\} \geq p_i \quad (i = \overline{1, m}),$$

$$X \geq 0.$$

У даній задачі необхідно мінімізувати величину k , що обмежує витрати на виготовлення продукції $\left(\sum_{j=1}^n c_j x_j\right)$, причому така вимога має виконуватися не строго, а із заданим рівнем імовірності — p_0 . Інші обмеження також виконуються з певною імовірністю — $p_i \quad (i = \overline{1, m})$.

Допустимо, що випадкова величина $c_j \quad (j = \overline{1, n})$ — нормально розподілена з математичним сподіванням $\bar{c}_j$ і кореляційною матрицею $C = (c_{ij})$, де $c_{ij} = M\{(c_i - \bar{c}_i)(c_j - \bar{c}_j)\}$. Тоді вираз $\sum_{j=1}^n c_j x_j$ буде випадковою величиною, що також нормально розподілена з математичним сподіванням $\sum_{j=1}^n \bar{c}_j x_j$ та дисперсією $\sum_{t=1}^n \sum_{j=1}^n c_{tj} x_t x_j$. Отже, (з попередніх викладок) можна записати:

$$P\left\{\sum_{j=1}^n c_j x_j \leq k\right\} = p_0 \Rightarrow \Phi\left(\frac{k - \sum_{j=1}^n \bar{c}_j x_j}{\sqrt{\sum_{t=1}^n \sum_{j=1}^n c_{tj} x_t x_j}}\right) = p_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k(X) = \sum_{j=1}^n \bar{c}_j x_j + \Phi^{-1}(p_0) \sqrt{\sum_{t=1}^n \sum_{j=1}^n c_{tj} x_t x_j}.$$

При $p_0 \geq 0$ величина $k(X)$ є угнутою функцією за змінними x_j . Отже, за зроблених допущень задачі стохастичного програмування

$$\min F = k ,$$

$$P\left\{\sum_{j=1}^n c_j x_j \leq k\right\} = p_0 ,$$

$$P\left\{\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i\right\} \geq p_i \quad (i = \overline{1, m}) ,$$

$$X \geq 0$$

відповідає детермінований еквівалент:

$$\min k(X) = \sum_{j=1}^n \bar{c}_j x_j + \Phi^{-1}(p_0) \sqrt{\sum_{t=1}^n \sum_{j=1}^n c_{tj} x_t x_j}$$

за умов:

$$\Phi^{-1}(p_i) \sqrt{\sum_t \sum_j v_{it} x_t x_j + 2 \sum_j v_{ij} x_j^2 + \theta_i^2} \leq \bar{b}_i - \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} x_j \quad (i = \overline{1, m}) .$$

Остання задача являє собою задачу опуклого програмування. Для її розв'язування можна застосувати теорему Куна—Таккера, або один з інших методів розв'язування задач нелінійного програмування.

Приклад. Фермер має змогу купити три види зерна та готувати з нього різні суміші для виробництва свинини. У таблиці містяться дані про поживність зерна, його вартість і мінімальні та максимальні потреби у поживних речовинах. Потреба у поживних речовинах розподілена рівномірно на зазначених інтервалах від мінімально можливого до максимального рівня $[\min_i; \max_i]$ для кожної i -ої поживної речовини $(i = \overline{1, 4})$.

Необхідно розробити математичну модель поставленої задачі і знайти оптимальний розв'язок, який забезпечував би мінімальні витрати на закупівлю зерна за умов задоволення мінімально допустимих потреб у всіх поживних речовинах з ймовірністю $\gamma = 0,9$.

ВМІСТ ПОЖИВНИХ РЕЧОВИН В 1 Ц ЗЕРНАТА ПОТРЕБА У ПОЖИВНИХ РЕЧОВИНАХ

Зерно	Поживна речовина				Ціна, грн
	кормові одиниці, ц	перетравний протеїн, кг	лізин, кг	кальцій, кг	
Ячмінь, ц	1,15	8,5	0,41	0,2	45
Кукурудза, ц	1,33	7,3	0,21	0,05	40
Горох, ц	1,18	19,2	1,42	0,2	50
Потреба у поживних речовинах:					
а) максимальна (max_i)	106	890	45	12	—
б) мінімальна (min_i)	95,4	801	41	9	—

Розв'язання. Нехай x_1, x_2, x_3 — відповідно обсяги ячменю, кукурудзи і гороху, які необхідно закупити.

Критерій оптимальності:

$$\min F(x_1, x_2, x_3) = 45x_1 + 40x_2 + 50x_3$$

за умов:

$$P\{1,15x_1 + 1,33x_2 + 1,18x_3 \geq a\} \geq 0,9;$$

$$P\{8,5x_1 + 7,3x_2 + 19,2x_3 \geq b\} \geq 0,9;$$

$$P\{0,41x_1 + 0,21x_2 + 1,42x_3 \geq c\} \geq 0,9;$$

$$P\{0,2x_1 + 0,05x_2 + 0,2x_3 \geq d\} \geq 0,9 ,$$

де a, b, c, d — відповідно потреби кормових одиниць, перетравного протеїну, лізину та кальцію (випадкові, рівномірно розподілені величини).

Цю систему ймовірнісних обмежень запишемо детермінованими еквівалентами, тобто:

$$1,15x_1 + 1,33x_2 + 1,18x_3 \geq a_1;$$

$$8,5x_1 + 7,3x_2 + 19,2x_3 \geq b_1;$$

$$0,41x_1 + 0,21x_2 + 1,42x_3 \geq c_1;$$

$$0,2x_1 + 0,05x_2 + 0,2x_3 \geq d_1,$$

де a_1, b_1, c_1, d_1 — відповідно значення випадкових величин, що задовольняють умови:

$$P\{a \geq a_1\} \geq 0,9; \text{ і } P\{b \geq b_1\} \geq 0,9;$$

$$P\{c \geq c_1\} \geq 0,9; \text{ і } P\{d \geq d_1\} \geq 0,9.$$

Визначимо параметри a_1, b_1, c_1, d_1 . З теорії ймовірностей відомо, що:

$$\frac{1}{106 - 95,4} \int_{95,4}^{a_1} d\varphi = 0,9.$$

Отже, маємо: $\frac{1}{10,6} \left(\varphi \Big|_{95,4}^{a_1} \right) = 0,9$. Звідси: $\frac{1}{10,6} (a_1 - 95,4) = 0,9$ або $a_1 - 95,4 = 9,54$, тому $a_1 = 104,94$.

Відповідно отримаємо: $b_1 = 881,1$; $c_1 = 44,6$; $d_1 = 11,7$.

Запишемо детермінований варіант економіко-математичної моделі купівлі фермером зерна, яке буде використано для відгодівлі свиней:

$$\min F(x_1, x_2, x_3) = 45x_1 + 40x_2 + 50x_3$$

за умов:

$$1,15x_1 + 1,33x_2 + 1,18x_3 \geq 104,94,$$

$$8,5x_1 + 7,3x_2 + 19,2x_3 \geq 881,1,$$

$$0,41x_1 + 0,21x_2 + 1,42x_3 \geq 44,6,$$

$$0,2x_1 + 0,05x_2 + 0,2x_3 \geq 11,7,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Розв'язавши цю задачу симплексним методом, отримаємо: $x_1 = 30,94$, $x_2 = 35,59$, $x_3 = 18,66$. Оптимальні витрати дорівнюють 3749 гривням.