РОЗДІЛ 3

ЦІЛОЧИСЛОВІ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ ЗНАХОДЖЕННЯ ЇХ ОПТИМАЛЬНИХ РОЗВЯЗКІВ

3.1. Постановка цілочислової оптимізаційної задачі
3.2. Приклади задач цілочислового програмування
3.3. Загальна характеристика методів розв'язання цілочислових задач лінійного програмування
3.4. Метод Гоморі – представник методів відтинання
3.5. Метод гілок та меж – представник комбінаторних методів
3.6. Приклади та завдання для самостійної роботи
3.7. Контрольні питання

3.1. Постановка цілочислової оптимізаційної задачі

Поява вимоги цілочисловості в економічних задачах є досить очевидною і пов'язана з наявністю у моделях параметрів, які можуть набувати тільки цілих значень. Нелінійність, яка випливає з вимог цілочисловості змінних, є незначною. Тому цілочислове програмування часто розглядають як розділ математичної оптимізації лінійних моделей, в яких на деякі чи всі змінні накладено умову цілочисловості.

Зауважимо, що задачі цілочислового програмування є частковим випадком загальнішого типу задач – дискретної оптимізації. Вимоги дискретності змінних, якщо не в явному вигляді, то в прихованій формі властиві багатьом практичним типам задач, що забезпечує дуже широке коло застосування дискретного програмування в багатьох теоретичних і прикладних дисциплінах. Задачі проектування, планування, розміщення, класифікації і управління добре формалізуються за допомогою різних моделей дискретного програмування.

За змістом значної частини економічних задач, що відносяться до задач лінійного програмування, компоненти розв'язку повинні виражатися в цілих числах, тобто бути цілочисловими. До них відносяться, наприклад, задачі, у яких змінні означають кількість одиниць неподільної продукції, число верстатів при завантаженні устаткування, число кораблів, які розподіляють по лініях, число турбін в енергосистемі, число обчислювальних машин у керуючому комплексі і багато іншого.

Задача лінійного цілочислового програмування формулюється так: знайти такий розв'язок (план) $\mathrm{X} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, ..., \mathrm{x}_\mathrm{n})$, при якому лінійна функція

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{3.1}$$

приймає максимальне або мінімальне значення при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, ..., m. \tag{3.2}$$

$$x_j \geq 0,, \quad j = 1, 2, ..., n. \tag{3.3}$$

$$x_j - \text{цілі числа.} \tag{3.4}$$

Слід зазначити, що класична транспортна задача і деякі інші транспортного типу «автоматично» забезпечують розв'язок задачі в цілих числах (якщо, скінчені цілочислові параметри умов). Однак у загальному випадку умова цілочисловості (3.4), що додається до звичайних задач лінійного програмування, істотно ускладнює її розв'язок.

Для розв'язку задач лінійного цілочислового програмування використовується ряд методів. Найпростіший з них - звичайний метод лінійного програмування. У випадку, якщо компоненти оптимального розв'язку є нецілочисловими, їх округляють до найближчих цілих чисел. Цей метод застосовують тоді, коли окрема одиниця сукупності складає малу частину всієї сукупності. У іншому випадку округлення може привести до далекого від оптимального цілочислового розв'язку, тому використовують спеціально розроблені методи.

Методи цілочислової оптимізації можна розділити на три основні групи: а) методи відсікання; б) комбінаторні методи; в) наближені методи. Зупинимося докладніше на методах відсікання.

3.2. Приклади задач цілочислового програмування

Задача про призначення.

Економічна постановка задачі про призначення така: для виконання n різних робіт виділено n виконавців (робітників, станків, фірм,...). За кожною роботою можна закріпити лише одного виконавця. Кожен виконавець може виконувати лише одну роботу. Прибуток від виконання i-ої роботи j-им виконавцем становить c_{ij}.

Потрібно розподілити виконавців за роботами так, щоб загальний прибуток був найбільшим.

Для побудови відповідної математичної моделі введемо змінні x_{ij} (i=1,...,n; j=1,...,n) так:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad i-й \quad виконавець \quad виконує \quad \text{j-ту} \quad роботу \\ 0, & в \quad іншому \quad випадку \end{cases}.$$

Отже, проблема полягає у тому, щоб в наступній таблиці (таблиці 3.1) проставити нулі та одиниці найкращим способом. У кожному рядку, як і в кожному стовпці допускається рівно один нуль.

Таблиця 3.1

Виконав-ці	Роботи				
	1	......	j	....	n
1	0	0	1	0	0
.....	0	1	0	0	0
i	1	0	0	0	0
.....	0	0	0	1	0
n	0	0	0	0	1

Математична постановка задачі про призначення, таким чином, така: знайти невідомі величини x_{ij} так, щоб надати максимум лінійній формі L з обмеженнями чотирьох типів:

$$L = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \max \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (i = 1,..., n) \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (j = 1,..., n) \qquad (3)$$

$$0 \le x_{ij} \le 1 \quad (i = 1,..., n;\ j = 1,..., n) \qquad (4)$$

$$x_{ij} - \textit{цілі} \ (i = 1,..., n;\ j = 1,..., n) \qquad (5)$$

Це типова цілочислова задача лінійного програмування.

Оптимізація складу та обігу стада великої рогатої худоби.

Виходячи з наявності поголів'я великої рогатої худоби на початок року, необхідно визначити оптимальний рух стада, який забезпечить виконання планів реалізації продукції, задоволення внутрішньогосподарських потреб, а також подальше відтворення поголів'я. Критерієм оптимальності може бути максимум товарної продукції тваринництва у вартісному виражені, виробництво молока чи м'яса.

Для розробки моделі необхідно мати наступну інформацію:

- поголів'я тварин на початок року за статево-віковими групами;
- вихід телят на 100 голів маточного стада;
- норми вибракування по статево-віковим групам;
- продуктивність однієї голови;
- план реалізації продукції тваринництва;
- ціни реалізації.

Склад змінних. План обороту стада складається з наступних розділів: поголів'я на початок року; надходження, який відображає джерела зміни поголів'я; вибуття, який показує вибуття худоби по групам; поголів'я на кінець року.

Виходячи з цього, визначають основні групи перемінних:

$y_i^{(1)}$, $y_i^{(2)}$ – відповідно поголів'я на початок і кінець року по і-й статево-віковій групі тварин;

$y_i^{(0)}$ – середньорічне поголів'я корів;

$x_i^{(1)}$, $x_i^{(2)}$, $x_i^{(3)}$ – надходження з інших груп ($x_i^{(1)}$), приплід ($x_i^{(2)}$), купівля племінної і користувальної худоби ($x_i^{(3)}$);

$Z_i^{(s)}$, де s = 1-5 – переведення худоби в інші групи ($Z_i^{(1)}$), реалізація м'яса ($Z_i^{(2)}$), продаж племоб'єднанням ($Z_i^{(3)}$), іншим господарствам ($Z_i^{(4)}$), інше вибуття ($Z_i^{(5)}$).

Сиситема обмежень. При складанні плану річного обороту стада виділяють наступні статеві і вікові групи тварин: бугаї, корови, нетелі, телиці народження позаминулого року, телиці народження минулого року, бички і кастрати всіх вікових періодів, доросла худоба на відгодівлі, телята народження року, що планується. Однак у групі "бички і кастрати всіх вікових періодів" поєднано молодняк народження позаминулого і минулого років, у групі "телята народження року, що планується" – бички і телички, хоча вони звичайно мають різний добовий приріст живої маси і різне господарське призначення. При моделюванні ці групи доцільно розділяти.

З урахуванням зазначеного визначають склад обмежень по кожній групі умов: наявності поголів'я на початок року, руху поголів'я і т. д.

Охарактеризуємо задачу в математичній формі.

Найти план: yi (1), yi (2) – відповідно поголів'я на початок і кінець року по і-й статевовіковій групі тварин; yi (0) – середньорічне поголів'я корів; xi (1), xi (2) , xi (3) – надходження з інших груп (xi (1)), приплід (xi (2)), купівля племінної і користувальної худоби (xi (3)); Zi (s) , де s = 1-5 – переведення худоби в інші групи (Zi (1)), реалізація м'яса (Zi (2)), продаж племоб'єднанням (Zi (3)), іншим господарствам (Zi (4)), інше вибуття (Zi (5)).

Де n, k, s – індекси підгруп перемінних: n = 0-2, k = 1-3, s = 1-5, при якому

досягається максимум товарної продукції тваринництва (грн.):
де C_j – вартість товарної продукції у розрахунку на 1 голову j-ї статево-вікової групи тварин, грн.

1. Поголів'я тварин на початок року, гол.:

$$y_i^{(1)} = B_j \ (j \in D),$$

де D – множина статево-вікових груп тварин;
B_j – поголів'я j-ї групи на початок року, гол.

2. Рух поголів'я кожної статево-вікової групи, гол.:

$$y_i^{(1)} + x_j^{(k)} = Z_j^{(s)} + y_i^{(2)} \ (j \in i).$$

Групу перемінних по поголів'ю на початок року і першу групу обмежень в модель можна не вводити, але поголів'я на початок року відображають в правій частині другої групи обмежень. Але в даній моделі перемінні по поголів'ю на початок року не вилучаються, так як вона в такому вигляді більш наглядно імітує відповідну форму планових документів і більш зручна для автоматизації розрахунків.

3. Співвідношення між переведенням поголів'я в сарші групи і надходженням із молодших груп, гол.:

$$Z_i^{(1)} = x_j^{(1)} \ (j \in D).$$

4. Вихід приплоду, гол.:

$$x_j^{(2)} = g_i * (y_j^{(1)} + x_i^{(1)}) \ (j \in D^{(')}),$$

де $D^{(')}$ – підмножина статево-вікових груп (телички народження планового року, бички народження планового року);
g_i – вихід телят на 100 голів маточного стада.
Як видно з даного обмеження, приплід пов'язується не лише з поголів'ям корів на початок року, але й з поголів'ям нетелей, яке буде переведене протягом планового року в групу корів.
5. Вибракування поголів'я, гол.:

$$Z_i^{(2)} >= d_j x_j^{(1)} \ (j \in D),$$

де d_j - коефіцієнт по вибракуванню поголів'я j-ї статево-вікової групи тварин.

6. Поголів'я молодняку на дорощуванні і відгодівлі у населення за угод ома, гол.:

$$Z_i^{(1)} = b_j.$$

6. Сумарне вихідне поголів'я на кінець року, гол.:

$$y_j^{(2)} = y_j^{(1)},$$

в тому числі корів

$$y_j^{(2)} = y_j^{(1)}.$$

6. Продаж тварин племоб'єднанню, іншим господарствам, інші вибуття, гол.:

$$Z_i^{(s)} = b_j^{(s)},$$

де $b_j^{(s)}$ – поголів'я j-ї статево-вікової групи тварин (s = 3, 4, 5).

6. Продаж м'яса, ц:

де і – індекс виду продукції;

Q_i – планове завдання на продаж продукції і-го виду, ц;

- вихід і-го виду продукції на одну голову j-ї статево-вікової групи, ц.

6. Виробництво молока для виконання плану продажу і задоволення внутрішньогосподарських потреб, ц:
6. Середньорічне поголів'я корів, гол.:

$$y_j^{(0)} = 0,5\ (y_j^{(1)} + y_i^{(2)}).$$

Річний оборот стада не дозволяє досить точно визначити середньорічне поголів'я тварин. З цією метою складають помісячний оборот стада. Але по поголів'ю корів (при відносній їх стабільності) цей розрахунок може бути передбачений у моделі з незначною результативною погрішністю, так як цей параметр необхідний для математичної формалізації умов по виробництву молока, товарної продукції.

Змінні цієї задачі позначають кількість тварин певної статево-вікової групи, кількість тварин, що підлягає вибракуванню. Природньо, що ці змінні мають приймати тільки цілих значень.

Задача про завантаження обладнання.

Розглянемо задачу завантаження обладнання, коли один і той же виконавець (технічний засіб, робітник) може використовуватися для декількох робіт за умови, що окремі роботи повинні бути взаємопов'язані однією метою: виконати одну завершену роботу.

Нехай, наприклад, двоє працівників (Іван та Степан) займаються відсиланням листів. Іван друкує один лист за 5хв. і підписує один конверт за 1хв. Степан друкує той же лист за 10 хв, а конверт підписує аж 5хв. Отже, за одну годину Іван може або надрукувати 12 листів або підписати 60 конвертів. Степан за цей же час або надрукує 6 листів, або підпише 12 конвертів.

Легко переконатися, що коли обидва працівники працюватимуть окремо, то всього за годину вони відправлять 14 листів (10 листів Іван та 4 листи Степан).

Якщо ж Іван буде лише друкувати, а Степан займатися конвертами, то за цю ж годину буде відправлено тільки 10 листів. Ситуація, коли друкує листи Степан, а Іван підписує конверти, ще гірша.

Побудуємо математичну модель, яка вкаже нам на найкращий із всіх можливих способів кооперації праці цих працівників.

Нехай x_{11} $(0 \le x_{11} \le 1)$ - частка робочого часу, яку використовує Іван на друкування листів, а x_{12} $(0 \le x_{12} \le 1)$ - на підписання конвертів.

Нехай x_{21} та x_{22} $(0 \le x_{21}, x_{22} \le 1)$ - частки робочого часу, які використовує Степан відповідно на друкування та на підписання конвертів.

Очевидно, повинна виконуватися умова: загальна кількість надрукованих листів повинна збігатися із загальною кількістю підписаних конвертів: $12x_{11}+6x_{21}=60x_{12}+12x_{22}$; при цьому ця величина $L=12x_{11}+6x_{21}$ має бути якнайбільшою. Крім того, обидва працівники повинні бути зайняті весь свій робочий час: $x_{11}+x_{12}=1$; $x_{21}+x_{22}=1$.

Отже, маємо математичну постановку даної задачі про завантаження обладнання: знайти такі значення величин x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, які надають максимального значення функції

$$F=12x_{11}+6x_{21} \rightarrow \max \qquad (1)$$

за умов

$$12x_{11}+6x_{21}-60x_{12}-12x_{22}=0$$

$$x_{11}+x_{12}=1 \qquad (2)$$

$$x_{21}+x_{22}=1$$

$$(0 \leq x_{11},x_{12},x_{21},x_{22} \leq 1) \qquad (3)$$

Задача про рюкзак.

Найпростішою задачею цілочислового програмування, а саме задачею лише з одним обмеженням, є задача про рюкзак (або ранець). Така задача має багато прикладів практичного застосування. Назва «задача про рюкзак» пов'язана з інтерпретацією задачі вибору найкращого складу предметів, що задовольняють певні умови гіпотетичної проблеми туриста щодо вибору для походу оптимальної кількості речей.

Турист може вибирати потрібні речі із списку з n предметів. Відома вага кожного j-го предмета $m_j (j=\overline{1,n})$. Визначена також цінність кожного виду предметів w_j. Максимальна вага всього вантажу в рюкзаку не може перевищувати зазначеного обсягу M. Необхідно визначити, скільки предметів кожного виду турист має покласти в рюкзак, щоб загальна цінність спорядження була максимальною за умови виконання обмеження на вагу рюкзака.

Позначимо через x_j – кількість предметів j-го виду в рюкзаку. Тоді математична модель задачі матиме вигляд:

$$\max F = \sum_{j=1}^{n} w_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} m_j x_j \le M;$$

$$x_j \ge 0,\ x_j \text{ — цілі числа, } (j=\overline{1,n})$$

Приклад. Фермеру для удобрення земельної ділянки необхідно придбати 107 кг добрив. Він може купити добрива в упаковках по 35 кг вартістю 14 ум. од. або по 24 кг вартістю 12 ум. од. Метою фермера є закупівля не менше, ніж 107 кг добрив з мінімальними витратами. Причому потрібно купувати або цілу упаковку, або не купувати її зовсім, бо частину упаковки придбати неможливо.

Розв'язання. Позначимо кількість упаковок вагою 35 кг та вагою 24 кг відповідно змінними x_1 та x_2. Маємо модель цієї задачі:

$$\min F = 14x_1 + 12x_2$$

$$35x_1 + 24x_2 \ge 107;$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_1, x_2 \text{ — цілі числа.}$$

Задача оптимального розкрою матеріалів.

На підприємстві здійснюється розкрій m різних партій матеріалів у обсягах $b_i (i=\overline{1,m})$ одиниць однакового розміру в кожній партії. Із матеріалів усіх партій потрібно виготовити максимальну кількість комплектів Z, у кожен з яких входить p різних видів окремих частин в кількості $k_r (r=\overline{1,p})$ одиниць, враховуючи, що кожну одиницю матеріалу можна розкроїти на окремі частини n різними способами, причому у разі розкрою одиниці i-ої партії j-им способом отримуємо a_{ijr} деталей r-го виду.

Запишемо математичну модель задачі. Позначимо через x_{ij} — кількість одиниць матеріалу *i*-ої партії, що будуть розкроєні *j*-им способом. Тоді з *i*-ої партії за *j*-го способу розкрою отримаємо $a_{ijr}\, x_{ij}$ деталей *r*-го виду. З усієї ж *i*-ої партії у разі застосування до неї всіх *n* способів розкрою отримаємо $\sum_{j=1}^{n} a_{ijr} x_{ij}$

деталей r-го виду, а з усіх m партій їх буде отримано $Z_r = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijr}x_{ij}$. У кожен комплект має входити $k_r(r = \overline{1,p})$ деталей, тому відношення $Z_r/k_r(r = \overline{1,p})$ визначає кількість комплектів, які можна виготовити з деталей r-го виду. Кількість повних комплектів для всіх видів деталей визначається найменшим з цих відношень.

У разі повного комплекту має виконуватися рівність відношень:

$$Z_1/k_1 = Z_2/k_2 = \ldots = Z_r/k_r = \ldots = Z_p/k_p\ ,$$

звідки $p - 1$ відношення можна виразити через будь-яке з них, наприклад, через перше:

$$Z_r/k_r = Z_1/k_1 \quad (r = \overline{2,p}) \text{ або } Z_r = k_r Z_1/k_1 \quad (r = \overline{2,p})\,.$$

Замінивши Z_r та Z_1 їх значеннями, отримаємо $p - 1$ обмеження стосовно комплектів:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijr}x_{ij} = \frac{k_r}{k_1}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij1}x_{ij}\ ;$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ijr} - \frac{k_r}{k_1}a_{ij1}\right)x_{ij} = 0,\ r = \overline{2,p}.$$

Враховуючи наявну кількість одиниць матеріалу в партіях, запишемо m обмежень щодо ресурсів:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i \ (i = \overline{1,m})\,.$$

(Обмеження щодо використання ресурсів можуть бути рівняннями чи нерівностями залежно від того, повністю чи не повністю необхідно використати наявний обсяг ресурсів).

Всі x_{ij} мають задовольняти умову невід’ємності: $x_{ij} \ge 0(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$ та цілочисловості.

Отже, необхідно знайти найбільше значення функції:

$$\max Z = \min_{1 \le r \le p} \frac{1}{k_r}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijr}x_{ij}$$

за обмежень:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ijr}-\frac{k_r}{k_1}a_{ij1}\right)x_{ij}=0,(r=\overline{2,p}); \\ \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=b_i\ (i=\overline{1,m}); \end{cases}$$

$$x_{ij}\geq 0\ (i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}),$$

$$x_{ij} \text{ — цілі числа } (i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}).$$

Задача комівояжера.

Розглядається n міст A_1, A_2,..., A_n, що пов'язані між собою транспортною мережею. Відома матриця відстаней від кожного міста до усіх інших:

$$c_{ij}=\begin{pmatrix} 0 & c_{12} & ... & c_{1n} \\ c_{21} & 0 & ... & c_{2n} \\ .... & .... & ... & ..... \\ c_{n1} & c_{n2} & ... & 0 \end{pmatrix},$$

причому в загальному випадку не завжди $c_{ij}=c_{ji}$. Комівояжер повинен побувати в кожному місті тільки один раз і повернутися в те місто, з якого почав рухатися. Необхідно відшукати такий замкнений маршрут, що проходить через кожне місто лише один раз і довжина якого мінімальна.

Позначимо:

$$x_{ij}=\begin{cases} 1, \text{ якщо маршрут передбачає переїзд із } i\text{-го міста до } j\text{-го;} \\ 0, \text{ в іншому разі.} \end{cases}$$

Отже, x_{ij} може набувати лише двох значень: одиниці або нуля. Такі змінні мають назву бульових змінних. Очевидно, що вони є цілочисловими. Цільовою функцією цієї задачі є мінімізація всього маршруту комівояжера:

$$\min Z=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij},$$

де c_{ij} — відстань між містами i та j.

Обмеження щодо одноразового в'їзду в кожне місто:

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1\ \left(j=\overline{1,n};\ i\neq j\right).$$

Обмеження щодо одноразового виїзду з кожного міста:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \left(i = \overline{1,n}; i \neq j\right).$$

Зазначені обмеження не повністю описують допустимі маршрути і не виключають можливості розриву маршруту. Щоб усунути цей недолік, введемо невід'ємні цілочислові змінні $u_i(u_j)$ $\left(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n};\ i \neq j\right)$, які в процесі розв'язування задачі набуватимуть значень порядкових номерів міст за оптимальним маршрутом прямування комівояжера. Запишемо обмеження, які усувають можливість існування підмаршрутів:

$$u_i - u_j + nx_{ij} \leq n - 1 \left(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n};\ i \neq j\right).$$

Доведемо, що для довільного маршруту, який починається в пункті A_1, можна знайти такі $u_i(u_j)$, що задовольняють наведену нерівність. Нехай комівояжер переїжджає з міста A_i до міста A_j на p-му кроці і допустимо також, що $u_i = p$, тоді з міста A_j комівояжер вирушить на наступному, (p + 1)-му кроці і $u_j = p + 1$. Звідси випливає, що:

$$u_i - u_j + nx_{ij} = p - (p+1) + nx_{ij} = -1 + nx_{ij} \leq n - 1.$$

Така нерівність виконується для будь-яких значень i та j у разі, коли $x_{ij} = 0$, а при $x_{ij} = 1$ нерівність виконується як строге рівняння. Отже, якщо вибрано маршрут пересування з i-го міста до j-го, то згадана нерівність фіксує два підряд порядкових номери цих міст.

Отже, маємо таку математичну модель:

$$\min Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \ (j = \overline{1,n};\ i \neq j); \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \ (i = \overline{1,n};\ i \neq j); \\ u_i - u_j + nx_{ij} \leq n - 1 \ (i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n}; i \neq j), \end{cases}$$

$$x_{ij} \in \{0;1\}\ (i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n}).$$

Задача з постійними елементами витрат.

Відомо, що витрати на виготовлення будь-якої продукції складаються з двох частин: постійних та змінних витрат.

Нехай розглядається процес виробництва продукції за умов використання m видів ресурсів. Відомі обсяги кожного виду ресурсів $b_1, b_2, ..., b_m$, а також норми використання i-го $(i = \overline{1,m})$ виду ресурсів на одиницю виготовлення j-го $(j = \overline{1,n})$ виду продукції a_{ij}.

Умови використання ресурсів на виготовлення продукції можна записати у вигляді таких обмежень:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i\ (i = \overline{1,m}).$$

Витрати на виготовлення продукції поділяють на два види: постійні витрати — k_j, які не залежать від обсягу виробництва, і змінні — c_j, що розраховуються на одиницю виготовленої продукції, де j — вид продукції. Необхідно визначити оптимальні обсяги виробництва продукції $x_j (j = \overline{1,n})$, за яких загальні витрати були б мінімальними.

Зауважимо, що виготовлення будь-якої кількості продукції $(x_j > 0)$ потребує певних фіксованих k_j та змінних $c_j x_j$ витрат, тобто загальна сума витрат на виготовлення продукції обсягом x_j визначається за формулою: $D_j = k_j + c_j x_j$. Однак у разі, якщо $x_j = 0$ (продукція не випускається), то розрахунок витрат за формулою $D_j = k_j + c_j x_j = k_j + c_j \cdot 0 = k_j$ призводить до додатного значення, що неправильно. Для адекватного відображення функціональної залежності загальних витрат від обсягу виробленої продукції j-го виду можна скористатися такою нелінійною функцією:

$$z_j = k_j y_j + c_j x_j,$$

де y_j є бульовими змінними виду: $y_j = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x_j = 0; \\ 1, \text{ якщо } x_j > 0. \end{cases}$

Таку умову можна записати у вигляді лінійної нерівності. Допустимо, що існує таке досить велике число *M*, для якого умова $x_j \le M$ виконуватиметься для всіх допустимих значень x_j. Тоді обмеження виду:

$$x_j \le My_j$$

завжди виконується при $y_j = 1$, і, крім того, якщо y_j – ціле число, то мінімізація цільової функції забезпечує найменше значення $y_j = 1$. Якщо $y_j = 0$, то нерівність $x_j \le My_j = 0$ забезпечить $x_j = 0$.

Отже, маємо таку математичну модель:
цільова функція, що описує мінімальні загальні витрати на виробництво всіх видів продукції, набуває вигляду:

$$\min Z = \sum_{j=1}^{n} (k_j y_j + c_j x_j)$$

за умов:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = \overline{1, m}); \\ x_j \le My_j \quad (j = \overline{1, n}); \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = \overline{1, n});$$

$$y_j \ge 0 \ (j = \overline{1, n});$$

$$y_j \text{ — цілі числа } (j = \overline{1, n}).$$

Задача планування виробничої лінії.

Розглядається процес функціонування виробничої лінії. Відома схема, яка зображає послідовність робіт для виготовлення *k* видів продукції $(k = \overline{1, K})$. Відомі також: a_j — тривалість виконання *j*-ї операції $\left(j = \overline{1, n}\right)$; $d_j^{(k)}$ — термін для *k*-го виробу, до якого необхідно завершити операцію *j*; x_j — момент початку *j*-ї операції; *t* — тривалість виконання всіх операцій. Допускається, що в будь-який момент на верстаті виконується тільки одна операція.

Необхідно визначити оптимальні моменти початку кожної операції.

Економіко-математична модель виробничої лінії міститиме такі групи обмежень:

1. Послідовність виконання j-ї операції записується для всіх пар операцій так: $x_j + a_j \le x_i \quad \left(i, j = \overline{1,n}\right)$, якщо j-та операція передує i-й операції.

2. Обмеження щодо нерозгалуженості виробничого процесу для операцій i та j, які не виконуються одночасно ($i \neq j$), має вигляд:

або $x_i - x_j = a_j$, якщо операція j передує операції i;

або $x_j - x_i = a_i$, якщо операція i передує операції j.

Зауважимо, що логічні обмеження виду «або-або» не можуть входити до економіко-математичної моделі задачі лінійного програмування, оскільки вони породжують неопуклу множину допустимих розв’язків. Тому необхідно ввести допоміжні змінні, які уможливлюють запис наведених вище логічних умов у вигляді лінійних обмежень. Це такі бульові змінні:

$$y_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{якщо операція } j \text{ передує } i; \\ 1, & \text{якщо операція } i \text{ передує } j. \end{cases}$$

Скориставшись прийомом з попереднього прикладу 6.6. (введення досить великого числа M), запишемо обмеження:

$$My_{ij} + \left(x_i - x_j\right) \ge a_j \quad \left(i, j = \overline{1,n}\right);$$

$$M\left(1 - y_{ij}\right) + \left(x_j - x_i\right) \ge a_i \quad \left(i, j = \overline{1,n}\right),$$

де M — досить велике число.

3. Обмеження щодо термінів виготовлення кожного виробу:

$$x_j + a_j \le d_j^{(k)} \quad (k = \overline{1,K}),$$

де j — остання операція для k-го виробу.

4. Усі операції мають бути виконані до моменту t:

$$x_j + a_j \le t, \left(j = \overline{1,n}\right).$$

Критерій оптимальності:

$$\min Z = t,$$

тобто ставиться завдання, щоб тривалість виготовлення всіх видів виробів була мінімальною.

Отже, маємо таку математичну модель:

$$\min Z = t$$

$$\begin{cases} x_j + a_j \le x_i \ (i, j = \overline{1,n};\ i \ne j); \\ My_{ij} + (x_i - x_j) \ge a_j \ \ (i, j = \overline{1,n};\ i \ne j); \\ M(1 - y_{ij}) + (x_j - x_i) \ge a_i \ \ (i, j = \overline{1,n};\ i \ne j); \\ x_j + a_j \le d_j^{(k)} \ (i = \overline{1,n};\ k = \overline{1,K}); \\ x_j + a_j \le t \ (j = \overline{1,n}); \end{cases}$$

$$x_i, (x_j) \ge 0\ t \ge 0;$$

$$y_{ij} \ge 0,\ y_{ij} \text{ — цілі числа } \left(i, j = \overline{1,n}\right).$$

3.3. Загальна характеристика методів розв’язання цілочислових задач лінійного програмування

Для знаходження оптимальних планів задач цілочислового програмування застосовують такі групи методів:

1) точні методи:

- методи відтинання;
- комбінаторні методи;

2) наближені методи.

Основою методів відтинання є ідея поступового «звуження» області допустимих розв’язків розглядуваної задачі. Пошук цілочислового оптимуму починається з розв’язування задачі з так званими послабленими обмеженнями, тобто без урахування вимог цілочисловості змінних. Далі введенням у модель спеціальних додаткових обмежень, що враховують цілочисловість змінних, багатогранник допустимих розв’язків послабленої задачі поступово зменшують доти, доки змінні оптимального розв'язку не набудуть цілочислових значень.

До цієї групи належать:

а) методи розв'язування повністю цілочислових задач (дробовий алгоритм Гоморі);

б) методи розв'язування частково цілочислових задач (другий алгоритм Гоморі, або змішаний алгоритм цілочислового програмування).

Комбінаторні методи цілочислової оптимізації базуються на ідеї перебору всіх допустимих цілочислових розв'язків, однак, згідно з їх процедурою здійснюється цілеспрямований перебір лише досить невеликої частини розв'язків.

Найпоширенішим у цій групі методів є метод гілок і меж.

Починаючи з розв'язування послабленої задачі, він передбачає поділ початкової задачі на дві підзадачі через виключення областей, що не мають цілочислових розв'язків, і дослідження кожної окремої частини багатогранника допустимих розв'язків.

Для розв'язування задач із бульовими змінними застосовують комбінаторні методи, причому, оскільки змінні є бульовими, то методи пошуку оптимуму значно спрощуються.

Досить поширеними є також наближені методи розв'язування цілочислових задач лінійного програмування. Оскільки для практичних задач великої розмірності за допомогою точних методів не завжди можна знайти строго оптимальний розв'язок за прийнятний час або для розв'язування задачі використовуються наближено визначені, неточні початкові дані, то часто в реальних задачах досить обмежитися наближеним розв'язком, пошук якого є спрощеним.

Значна частина наближених алгоритмів базується на використанні обчислювальних схем відомих точних методів, таких, наприклад, як метод гілок і меж.

До наближених методів належать: метод локальної оптимізації (метод вектора спаду); модифікації точних методів; методи випадкового пошуку та ін.

Головними показниками для зіставлення ефективності застосування конкретних наближених алгоритмів на практиці є такі: абсолютна Δ_1 та відносна Δ_2 похибки отриманих наближених розв'язків.

$$\Delta_1 = F(X^*) - F(X_1), \quad \Delta_2 = \frac{\left|F(X^*) - F(X_1)\right|}{\left|F(X^*)\right|},$$

де F — цільова функція (в даному разі для визначеності допускаємо вимогу відшукання максимального її значення); X1— наближений розв'язок, знайдений деяким наближеним методом; X* — оптимальний план задачі.

3.4. Метод Гоморі – представник методів відтинання

Сутність методів відсікання полягає в тому, що спочатку задача розв'язується без умови цілочисловості. Якщо отриманий план цілочисловий, то задача розв'язана. У іншому випадку до обмежень задачі додається нове обмеження, що володіє наступними властивостями:

- воно повинно бути лінійним;
- воно повинно відтинати знайдений оптимальний нецілочисловий план;
- воно не повинно відтинати жодного цілочислового плану.

Додаткове обмеження, що володіє зазначеними властивостями, називається правильним відсіканням.

Далі задача вирішується з урахуванням нового обмеження. Після цього в разі потреби додається ще одне обмеження і т.п.

Геометрично додавання кожного лінійного обмеження відповідає проведенню прямої (гіперплощини), що відтинає від багатокутника (багатогранника) розв'язків деяку його частину разом з оптимальною крапкою з нецілими координатами, але не торкається ні однієї з цілих крапок цього багатогранника. У результаті новий багатогранник розв'язку містить усі цілі крапки, які містилися в первинному багатограннику розв'язку і відповідно отриманий при цьому багатограннику оптимальний розв'язок буде цілочисловим. Один з алгоритмів розв'язку задачі лінійного цілочислового програмування (6.1)-(6.4), запропонований Гоморі. Цей алгоритм оснований на симплексному методі і використовує досить простий спосіб побудови правильного відсікання.

Нехай задача лінійного програмування (6.1)-(6.3) має кінцевий оптимум і на останньому кроці її розв'язку симплексним методом отримані наступні рівняння, що виражають основні змінні $x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_m$ через неосновні змінні $x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_{m+i}, .., x_n$ оптимального розв'язку

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 - \alpha_{1\,m+1} x_{m+1} - ... - \alpha_{1\,n} x_n, \\ x_2 = \beta_2 - \alpha_{2\,m+1} x_{m+1} - ... - \alpha_{2\,n} x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_i = \beta_i - \alpha_{i\,m+1} x_{m+1} - ... - \alpha_{i\,n} x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m = \beta_m - \alpha_{m\,m+1} x_{m+1} - ... - \alpha_{m\,n} x_n, \end{cases} \qquad (3.5)$$

так, що оптимальним розв'язком задачі (3.1)-(3.3) є $X^* = (\beta_1\, \beta_2, ..., \beta_i, ..., \beta_m, 0, 0, ..., 0)$, у якому, наприклад β_i – нецілий компонент. У цьому випадку можна довести, що нерівність[1]

$$\{\beta_i\} - \{\alpha_{i\,m+1}\} x_{m+1} - ... - \{\alpha_{i\,n}\} x_n \le 0, \qquad (3.6)$$

яка сформована по і-му рівнянню системи (6.5), має усі властивості правильного відсікання.

Для розв’язку задачі цілочислового лінійного програмування (3.1)-(3.4) методом Гоморі використовується наступний алгоритм:

1. Симплексним методом вирішити задачу (3.1)-(3.3) без враховування умови цілочисловості. Якщо усі компоненти оптимального плану цілі, то він є оптимальним і для задачі цілочислового програмування (3.1)-(3.4). Якщо перша задача (3.1)-(3.3) нерозв'язувана (тобто не має кінцевого оптимуму або умови її суперечливі), то і друга задача (3.1)-(3.4) також нерозв'язувана.

2. Якщо серед компонентів оптимального розв’язку є нецілі значення, то вибрати компоненту з найбільшою цілою частиною і по відповідному рівнянню системи (3.5) сформувати правильне відсікання (3.6).

3. Нерівність (3.6) введенням додаткової невід’ємної цілочислової змінної перетворити в рівносильне рівняння

$$\{\beta_i\} - \{\alpha_{im+1}\}x_{m+1} - \ldots - \{\alpha_{in}\}x_n + x_{n+1}, \qquad (3.7)$$

і включити його в систему обмежень (3.2).

4. Отриману розширену задачу розв’язати симплексним методом. Якщо знайдений оптимальний план буде цілочисловим, то задача цілочислового програмування (3.1)-(3.4) розв’язана. У іншому випадку повернутися до п.2 алгоритму.

Якщо задача розв'язувана в цілих числах, то після кінцевого числа кроків (ітерацій) оптимальний цілочисловий план буде знайдений.

Якщо в процесі розв’язання з'явиться рівняння (яке виражає основну змінну через неосновні) з нецілим вільним членом і цілими іншими коефіцієнтами, то відповідне рівняння не має розв’язку в цілих числах. У цьому випадку і дана задачі не має цілочислового оптимального розв’язку.

Приклад 3.1. Для придбання устаткування по сортуванню зерна фермер виділяє 34 грош. од. Устаткування повинне бути розміщене на площі, що не перевищує 60 кв.м. Фермер може замовити устаткування двох видів: менш потужні машини типу А вартістю 3 грош. од., що вимагають виробничу

В нерівності (3.6) присутній символ $\{\}$, який означає дробову частину числа. Цілою частиною числа а називається найбільше ціле число $[a]$, яке не більше а, а дробовою частиною числа є число $\{a\}$, яке дорівнює різниці між цим числом і його цілою частиною, тобто $\{a\} = a - [a]$. Наприклад,

1. для $a = 2\,{}^{1}\!/_{3}$, $[a] = 2, \{a\} = 2\,{}^{1}\!/_{3} - 2 = {}^{1}\!/_{3}$;
2. для $a = -2\,{}^{1}\!/_{3}, [a] = -3$ і $\{a\} = -2\,{}^{1}\!/_{3} - (-3) = {}^{2}\!/_{3}$.

площу 3 кв. м (з урахуванням проходів), і які забезпечують продуктивність за зміну 2 т зерна, і більш потужні машини типу В вартістю 4грош. од., що займають площу 5 кв. м і забезпечують продуктивність за зміну 3 т сортового зерна.

Потрібно скласти оптимальний план придбання устаткування, що забезпечує максимальну загальну продуктивність за умови, що фермер може придбати не більш 8 машин типу В.

Розв'язання. Позначимо через x_1, x_2 кількість машин відповідно типу А і В, через Z - загальну продуктивність. Тоді математична модель задачі прийме вид:

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max \qquad (3.1')$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 60, & (1) \\ 3x_1 + 4x_2 \le 34, & (2) \\ \qquad\;\; x_2 \le 8, & (3) \end{cases} \qquad (3.2')$$

$$x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0, \qquad (3.3')$$

$$x_1, x_2 - \textit{цілі числа.} \qquad (3.4')$$

Приведемо задачу до канонічного виду, ввівши додаткові додатні змінні x_3, x_4, x_5. Одержимо систему обмежень:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 \qquad\qquad = 60, \\ 3x_1 + 4x_2 \qquad + x_4 \qquad = 34, \\ x_2 \qquad\qquad\qquad + x_5 = \ 8, \end{cases} \qquad (3.5')$$
$$x_j \geq 0,\ j = 1,2,...,5.$$

Розв’яжемо задачу симплексним методом.

І крок. Основні змінні x_3, x_4, x_5; неосновні змінні x_1, x_2.

$$\begin{cases} x_3 = 60 - 3x_1 - 5x_2, \\ x_4 = 34 - 3x_1 - 4x_2, \\ x_5 = \ 8 \qquad - \ x_2, \end{cases}$$
$$Z = 2x_1 + 3x_2.$$

Перший базисний розв’язок $X_1 = (0;0;60;34;8)$ – допустимий. Відповідне значення лінійної функції $Z_1 = 0$.

Переводимо в основні змінні змінну x_2, що входить у вираз лінійної функції мети з найбільшим позитивним коефіцієнтом. Знаходимо максимально можливе значення змінної x_2, що «дозволяє» прийняти система обмежень, з умови мінімуму відповідних співвідношень:

$$x_2 = \min\left\{\frac{60}{5}; \frac{34}{4}; \frac{8}{1}\right\} = 8,$$

тобто рівняння, що дозволяє (виділене) є третє рівняння. При $x_2 = 8$ у цьому рівнянні $x_5 = 0$, і в неосновні переходить змінна x_5.

ІІ крок. Основні змінні x_2, x_3, x_4; неосновні змінні x_1, x_5.

$$\begin{cases} x_2 = \ \ 8 - x_5, \\ x_3 = 20 - 3x_1 + 5x_5, \\ x_4 = 2 - 3x_1 + 4x_5, \end{cases}$$
$$Z = 24 + 2x_1 - 3x_2.$$

$X_2 = (0;8;20;2;0)$; $Z_2 = 24$. Переводимо в основні змінну x_1, $x_1 = \min\left\{\infty; \frac{20}{3}; \frac{2}{3}\right\} = \frac{2}{3}$, а в неосновні x_4.

III крок. Основні змінні x_1, x_2, x_3; неосновні змінні x_4, x_5.

Після перетворень одержимо:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x_4 + \frac{4}{3}x_5, \\ x_2 = 8 \qquad\quad - x_5, \\ x_3 = 18 \ + x_4 \ \ + x_5, \end{cases}$$

$$Z = 25\frac{1}{3} - \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5.$$

$$\boldsymbol{X}_3 = (\frac{2}{3}; 8; 18; 0; 0); \ \boldsymbol{Z}_3 = 25\frac{1}{3}.$$

Базисний розв'язок X_3 оптимальний для задачі (3.1')-(3.3') $(Z_{\max} = Z_3 = 25\frac{1}{3})$, тому що у виразі лінійної функції відсутні неосновні змінні з позитивними коефіцієнтами.

Однак розв'язок X_3 не задовільняє умові цілочислових (3.4'). По першому рівнянню зі змінною x_1, що одержала цілочислове значення в оптимальному розв'язку (2/3), складаємо додаткове обмеження (3.6):

$$\left\{\frac{2}{3}\right\} - \left\{\frac{1}{3}\right\}\boldsymbol{x}_4 - \left\{-\frac{4}{3}\right\}\boldsymbol{x}_5 \le 0.$$

Звертаємо увагу на те, що згідно (6.5) і (6.6) беремо дробову частину вільного члена з тим же знаком, що він має в рівнянні, а дробові частини коефіцієнтів при неосновних змінних x_4 і x_5 – із протилежними знаками.

Тому що дробові частини $\left\{\frac{2}{3}\right\} = \left\{0 + \frac{2}{3}\right\} = \frac{2}{3}$, $\left\{\frac{1}{3}\right\} = \left\{0 + \frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{3}$,

$\left\{-\frac{4}{3}\right\} = \left\{-2+\frac{2}{3}\right\} = \frac{2}{3}$, ту останню нерівність запишемо у виді

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5 \le 0. \tag{3.6'}$$

Увівши додаткову цілочислову змінну $x_6 \ge 0$, одержимо рівносильне нерівності (6.6') рівняння

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5 + x_6 = 0. \tag{3.7'}$$

Рівняння (3.7') необхідно включити в систему обмежень (3.5') вихідної канонічної задачі, після чого повторити процес розв'язання задачі симплекс-ним методом стосовно розширеної задачі. При цьому для скорочення числа кроків (ітерацій) рекомендується вводити додаткове рівняння (3.7') у систему, отриману на останньому кроці розв'язків задачі (без умови цілочисловості).

IV крок. Основні змінні x_1, x_2, x_3, x_6; неосновні змінні x_1, x_2.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x_4 + \frac{4}{3}x_5, \\ x_2 = 8 - x_5, \\ x_3 = 18 + x_4 + x_5, \\ x_6 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x_4 + \frac{2}{3}x_5. \end{cases}$$

Базисний розв'язок $\boldsymbol{X}_4 = \left(\frac{2}{3};\ 8; 18; 0; 0; -\frac{2}{3}\right)$ - недопустимий. (Відмітимо, що після включення в систему обмежень додаткового рівняння, що відповідає правильному відсіканню, завжди буде виходити неприпустимий базисний розв'язок).

Для одержання допустимого базисного розв'язку необхідно перевести в основні змінну, яка входить у рівняння з позитивним коефіцієнтом, у якому вільний член негативний, тобто x_4 або x_5 (на цьому етапі лінійну функцію мети не розглядаємо). Переводимо в основні, наприклад, змінну x_5.

V крок. Основні змінні x_1, x_2, x_3, x_5; неосновні змінні x_4, x_6.

Після перетворень одержимо:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - x_4 + 2x_6, \\ x_2 = 7 + \dfrac{1}{2}x_4 - \dfrac{3}{2}x_6, \\ x_3 = 19 + \dfrac{1}{2}x_4 + \dfrac{3}{2}x_6, \\ x_5 = 1 - \dfrac{1}{2}x_4 + \dfrac{3}{2}x_6, \end{cases}$$

$$Z = 25 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_6.$$

$$X_5 = (2;7;19;0;1;0); \;\; Z_5 = 25.$$

Тому що у виразі лінійної функції мети немає основних змінних з позитивними коефіцієнтами, то X_5 – оптимальний розв'язок.

Отже $Z_{max} = 25$ при оптимальному цілочисловому розв'язку $X^* = X_5 = (2;7;19;0;1;0)$, тобто максимальну продуктивність 25 т сортового зерна за зміну можна одержати придбанням 2 машин типу А и 7 машин типу В; при цьому незайнята площа приміщення складе 19 кв. м, залишки коштів з виділених дорівнюють 0, у резерві для покупки 1 машина типу В (шостий компонент змістовного смислу не має).

Приклад 3.2. Є досить велика кількість колод довжиною 3 м. Колоди варто розпиляти на заготовки двох видів: довжиною 1,2 м і довжиною 0,9 м, причому заготовок кожного виду повинно бути отримано не менш 50 шт. і 81 шт. відповідно. Кожну колоду можна розпиляти на зазначені заготовки декількома способами: 1) на 2 заготівки по 1,2 м; 2) на 1 заготівку по 1,2 м і 2 заготівки по 0,9 м; 3) на 3 заготівки по 0,9 м. Знайти число колод, що розпилюються кожним способом, для того щоб заготовки будь-якого виду було отримано з найменшого числа колод.

Розв'язання. Позначимо через x_1, x_2, x_3 число колод, що розпилюються відповідно 1, 2 і 3-м способами. З них можна одержати $2x_1 + x_2$ заготовок по 1,2 м і $2x_1 + 3x_2$ заготовок по 0,9 м. Загальну кількість колод позначимо *Z*. Тоді математична модель задачі прийме вид:

$$Z = x_1 + x_2 + x_3 \to \min \qquad (3.1'')$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 50, \\ 2x_2 + 3x_3 \ge 81, \end{cases} \qquad (3.2'')$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,3 \qquad (3.3'')$$

$$x_j - \text{цілі числа.} \qquad (3.4'')$$

Вводячи додаткові змінні $x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0,$ приведемо систему нерівностей до рівносильної системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_4 = 50, \\ 2x_2 + 3x_3 - x_5 = 81, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,...,5. \qquad (3.5'')$$

Розв'язуючи отриману канонічну задачу (без умови цілочисловості) симплексним методом, на останньому, III кроці розв'язання знайдемо наступні вирази основних змінних і лінійної функції мети через неосновні змінні (рекомендуємо одержати їх самостійно).

III крок. Основні змінні x_1, x_2; неосновні змінні x_3, x_4, x_5.

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 = 4\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\boldsymbol{x}_3 + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_4 - \frac{1}{4}\boldsymbol{x}_5, \\ \boldsymbol{x}_2 = 40\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\boldsymbol{x}_3 \qquad + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_5, \end{cases}$$

$$\boldsymbol{Z} = 45\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\boldsymbol{x}_3 + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_4 + \frac{1}{4}\boldsymbol{x}_5,$$

тобто $Z_{\min} = 45\frac{1}{4}$ при оптимальному розв’язку $\boldsymbol{X}_3 = \left(4\frac{3}{4};\ 40\frac{1}{2};\ 0;\ 0;\ 0\right)$.

Одержали, що два компоненти оптимального розв’язку $x_1 = 4\frac{3}{4}$ і $x_2 = 40\frac{1}{2}$ не задовільняють умові цілочисловості (3.4’’), причому велику частину має компонента x_2. Відповідно до п.2 алгоритму розв’язку задачі цілочислового програмування (див. с.156) по другому рівнянню, що містить цю змінну x_2, складаємо додаткове обмеження (3.6):

$$\left\{40\frac{1}{2}\right\} - \left\{\frac{3}{2}\right\}x_3 - \left\{-\frac{1}{2}\right\}x_5 \le 0.$$

Знайдемо дробові частини $\left\{40\frac{1}{2}\right\} = \left\{40 + \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}, \left\{\frac{3}{2}\right\} = \left\{1 + \frac{1}{2}\right\} = \left\{\frac{1}{2}\right\},$

$\left\{-\frac{1}{2}\right\} = \left\{-\frac{1}{2} - (-1)\right\} = \frac{1}{2}$ і запишемо останню нерівність у виді

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5 \le 0. \qquad (3.6’’)$$

Ввівши додаткову змінну $x_6 \ge 0,$ одержимо рівносильне нерівності (6.6'') рівняння

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5 + x_6 = 0. \qquad (3.7'')$$

Виразимо з (6.7'') додаткову змінну x_6 і отримане рівняння введемо в систему обмежень, що ми мали на останньому, III кроці, розв'язку задачі (3.1'')-(3.3'') (без умови цілочисловості).

IV крок. Основні *змінні* x_1, x_2, x_6; неосновні змінні x_3, x_4, x_5.

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 = 4\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\boldsymbol{x}_3 + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_4 - \frac{1}{4}\boldsymbol{x}_5, \\ \boldsymbol{x}_2 = 40\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\boldsymbol{x}_3 \qquad + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_5, \\ \boldsymbol{x}_6 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_3 \qquad + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_5, \end{cases}$$

$$\boldsymbol{Z} = 45\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\boldsymbol{x}_3 + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_4 + \frac{1}{4}\boldsymbol{x}_5.$$

Розв'язуючи цю розширену задачу симплексним методом (пропонуємо студентам виконати самостійно), одержимо наступне.

V крок. Основні змінні x_1, x_2, x_3;

неосновні змінні x_4, x_5, x_6.

$$\begin{cases} x_1 = 5\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_4 - x_5 + \frac{3}{2}x_6, \\ x_2 = 39 \qquad + 2x_5 - 3x_6, \\ x_3 = \ \ 1 \qquad\ \ - x_5 + 2x_6, \\ \end{cases}$$

$$Z = 45\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_6,$$

тобто $Z_{\min} = 45\frac{1}{2}$ при оптимальному розв'язку $\boldsymbol{X}_5 = \left(5\frac{1}{2};\ 39;\ 1;\ 0;\ 0;\ 0\right)$.

Отриманий оптимальний розв'язок розширеної задачі (3.1'')-(3.3''), (3.6'') знову не задовільняє умові цілочисловості) (3.4''). По першому рівнянню із змінною x_1, що одержала цілочислові) значення в оптимальному розв'язку $\left(5\frac{1}{2}\right)$, складаємо друге додаткове обмеження (3.6):

$$\left\{5\frac{1}{2}\right\} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}x_4 - \{1\}x_5 - \left\{-\frac{3}{2}\right\}x_6 \le 0,$$

яке приводимо до виду $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{2}x_6 \le 0.$

За допомогою додаткової змінної $x_7 \ge 0$ приводимо цю нерівність до рівносильного рівняння, яке включаємо в систему обмежень, отриману на останньому, V кроці, розв'язку розширеної задачі (3.1'')-(6.3''), (3.6'') симплексним методом.

VI крок. Основні перемінні x_1, x_2, x_3, x_7; неосновні перемінні x_4, x_5, x_6.

$$\begin{cases} x_1 = 5\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_4 - x_5 + \frac{3}{2}x_6, \\ x_2 = 39 \qquad\quad + 2x_5 - 3x_6, \\ x_3 = \ 1 \qquad\qquad - x_5 + 2x_6, \\ x_7 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_4 \qquad\quad + \frac{1}{2}x_6, \end{cases}$$

$$Z = 45\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_6.$$

Випускаючи подальше розв’язання задачі симплексним методом (пропонуємо зробити це самим студентам), одержимо на заключному, VII кроці, наступне.

VII крок. Основні змінні x_1, x_2, x_3, x_4;

неосновні змінні x_5, x_6, x_7.

$$\begin{cases} x_1 = 6 - x_5 - x_6 - x_7, \\ x_2 = 39 + 2x_5 - 3x_6, \\ x_3 = 1 - x_5 + 2x_6, \\ x_4 = 1 - x_6 + 2x_7, \end{cases}$$

$$Z = 46 + x_7,$$

тобто $\qquad Z_7 = 46$ при $X_7 = (6;39;1;1;0;0;0)$.

Тому що у виразі лінійної функції мети немає неосновних змінних з негативними коефіцієнтами, X_7 – оптимальний цілочисловий розв’язок вихідної задачі.

Варто звернути увагу на те, що в отриманому виразі лінійної функції мети Z відсутні неосновні змінні x_5 і x_6. Це означає, що існує нескінченна безліч оптимальних розв’язків (будь-яких, не обов'язково цілочислових), при яких $Z^* = Z_{\min} = 46$. Ці розв’язки виходять при значенні неосновної змінної x_7 (що входить у вираз для Z), яка дорівнює нулеві (тобто при $x_7 = 0$), і при будь-яких значеннях неосновних змінних x_5 і x_6 (які не вхідять у вираз для Z), які «дозволяє» прийняти система обмежень: $0 \le x_5 \le \min\{6; 39/2; 1; \infty\} = 1$ і $0 \le x_6 \le \min\{\infty; 13; \infty; 1\} = 1$, тобто при $0 \le x_5 \le 1$ й $0 \le x_6 \le 1$. Але в силу умови цілочисловості змінні x_5 і x_6 можуть прийняти тільки значення 0 або 1.Тому задача буде мати чотири цілочислових оптимальних розв'язки, коли x_5 і x_6 у будь-якій комбінації приймають значення 0 або 1, а $x_7 = 0$. Підставляючи ці значення в систему обмежень на VII кроці, знайдемо ці оптимальні розв'язки:

$$\boldsymbol{X}_7^{(1)} = (6;\ 39;\ 1;\ 1;\ 0;\ 0;\ 0), \qquad \boldsymbol{X}_7^{(2)} = (7;\ 36;\ 3;\ 0;\ 0;\ 1),$$
$$\boldsymbol{X}_7^{(3)} = (5;\ 41;\ 0;\ 1;\ 1;\ 0;\ 0), \qquad \boldsymbol{X}_7^{(4)} = (6;\ 38;\ 2;\ 0;\ 1;\ 1;\ 0).$$

Наявність альтернативних оптимальних цілочислових розв'язків дозволяє здійснити вибір одного з них, керуючись додатковими критеріями, що не враховуються в математичній моделі задачі. Наприклад, з умови даної задачі випливає, що розпилювання колод не дає відходів лише по третьому способі, тому природно при виборі одного з чотирьох оптимальних розв'язків віддати перевагу розв'язку $X_7^{(3)}$, при якому максимальне число колод ($x_2 = 41$) розпилюється без відходів.

Отже, $Z_{\min} = 46$ при оптимальних цілочислових розв'язках (5;41;0), (6;39;1), (7;36;3), (6;38;2). (При записі оптимальних розв'язків ми залишили лише перші три компоненти, що виражають число колод, що розпилюються відповідно першим, другим і третім способами, і виключили останні чотири компоненти, що не мають смислового значення).

Недоліком методу Гоморі є вимога цілочисловості для всіх змінних – як основних (які виражають, наприклад, у задачі про використання ресурсів одиниці продукції), так і додаткових змінних (які виражають величину невикористаних ресурсів, що можуть бути і дробовими).

3.5. Метод гілок та меж – представник комбінаторних методів

В основі комбінаторних методів є перебір можливих варіантів розв'язків поставленої задачі. Кожен з них характеризується певною послідовністю перебору варіантів та правилами виключення, що дають змогу ще в процесі розв'язування задачі виявити неоптимальні варіанти без попередньої їх перевірки. Відносна ефективність різних методів залежить від того, наскільки кожен з них уможливлює скорочення необхідного процесу перебору варіантів у результаті застосування правила виключення.

Розглянемо один із комбінаторних методів. Для розв'язування задач цілочислового програмування ефективнішим за метод Гоморі є метод гілок і меж. Спочатку, як і в разі методу Гоморі, симплексним методом розв'язується послаблена (без умов цілочисловості) задача. Потім вводиться правило перебору.

Нехай потрібно знайти цілочислову змінну x_j, значення якої $x_j = x'_j$ в оптимальному плані послабленої задачі є дробовим. Очевидно, що в деякому околі даної точки також не існує цілочислових значень, тому відповідний проміжок можна виключити із множини допустимих планів задачі в подальшому розгляді. Таким проміжком є інтервал між найближчими до x'_j цілочисловими значениями. Можна стверджувати, що на інтервалі $[x'_j]$; $[x'_j]+1$[цілих значень немає ($[x'_j]$ - ціла частина x'_j).

Наприклад, якщо $x'_j = 2{,}7$ дістаємо інтервал]2;3[, де, очевидно, немає x_j, яке набуває цілого значення і оптимальний розв'язок буде знаходитися або в інтервалі $x_j \le 2$, або $x_j \ge 3$. Виключення проміжку]2;3[з множини допустимих планів здійснюється введенням до системи обмежень початкової задачі додаткових нерівностей. Тобто допустиме ціле значення x_j має задовільняти одну з нерівностей виду:

$$x_j \le \lfloor x_j' \rfloor \text{ або } x_j \ge \lfloor x_j' \rfloor + 1.$$

Дописавши кожну з цих умов до задачі з послабленими обмеженнями, дістанемо дві, не пов'язані між собою, задачі. Тобто, початкову задачу цілочислового програмування (3.1)—(3.4) поділимо на дві задачі з урахуванням умов цілочисловості змінних, значення яких в оптимальному плані послабленої задачі є дробовими. Це означає, що симплекс-методом розв'язуватимемо дві такі задачі:

перша задача: $$\max\ (\min)\ \boldsymbol{Z} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{c}_j \boldsymbol{x}_j \tag{3.14}$$

за умов:

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{c}_j \boldsymbol{x}_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} \boldsymbol{b}_i \quad (\boldsymbol{i} = \overline{1, \boldsymbol{m}});$$
$$(\boldsymbol{x}_j \ge 0 \quad (\boldsymbol{j} = \overline{1, \boldsymbol{n}});$$
$$\boldsymbol{x}_j - \textbf{\textit{цілі числа}}, \quad \boldsymbol{j} = \overline{1, \boldsymbol{n}};$$
$$\boldsymbol{x}_j \le \left[\boldsymbol{x}'_j\right], \tag{3.15)-(3.18}$$

друга задача: $$\max\ (\min)\ \boldsymbol{Z} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{c}_j \boldsymbol{x}_j \tag{3.19}$$

за умов:

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{c}_j \boldsymbol{x}_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} \boldsymbol{b}_i \quad (\boldsymbol{i} = \overline{1, \boldsymbol{m}});$$
$$(\boldsymbol{x}_j \ge 0 \quad (\boldsymbol{j} = \overline{1, \boldsymbol{n}});$$
$$\boldsymbol{x}_j - \textbf{\textit{цілі числа}}, \quad \boldsymbol{j} = \overline{1, \boldsymbol{n}};$$
$$\boldsymbol{x}_j \ge \left[\boldsymbol{x}'_j\right] + 1, \tag{3.20)-(3.23}$$

де x'_j –дробова компонента розв’язку задачі (6.1) – (6.4).

Наведені задачі (3.14)—(3.18) і (3.19)—(3.23) спочатку послаблюємо, тобто розв'язуємо з відкиданням обмежень (3.17) і (3.22). Якщо знайдені оптимальні плани задовільняють умови цілочисловості, то ці плани є розв'язками задачі (3.1)—(3.4). Інакше пошук розв'язку задачі триває. Для дальшого розгалуження вибираємо розв'язок задачі з більшим значенням цільової функції, якщо йдеться про максимізацію, і навпаки — з меншим значенням цільової функції в разі її мінімізації. Подальше розгалуження виконується доти, доки не буде встановлено неможливість поліпшення розв'язку. Здобутий останній план — оптимальний.

Розв'язування цілочислових задач методом гілок і меж можна значно прискорити. Очевидно, що кожна наступна задача, яку отримують в процесі розв'язування відрізняється від попередньої лише одним обмеженням. Тому за послідовного розв'язування задач немає сенсу розв'язувати їх симплексним методом спочатку. Досить буде почергово приєднати нові обмеження виду (3.18) і (3.23) до останньої симплекс-таблиці попередньої задачі та вилучити (в разі необхідності) непотрібні «старі» обмеження.

Геометрично введення додаткових лінійних обмежень виду (3.18) та (3.23) в систему обмежень початкової задачі означає проведення гіперплощин (прямих), що розтинають багатогранник (багатокутник) допустимих планів відповідної задачі лінійного програмування у такий спосіб, що уможливлюється включення в план найближчої цілої точки цього багатокутника (рис. 3.4). Допустимо, що A — точка максимуму, тоді за методом гілок та меж багатокутник допустимих планів задачі ABCOD поділяється на дві частини прямими $x_j \le \lfloor x'_j \rfloor$ та $x_j \ge \lfloor x'_j \rfloor + 1$, що виключає з розгляду точку A, координата якої x'_j є не цілим числом.

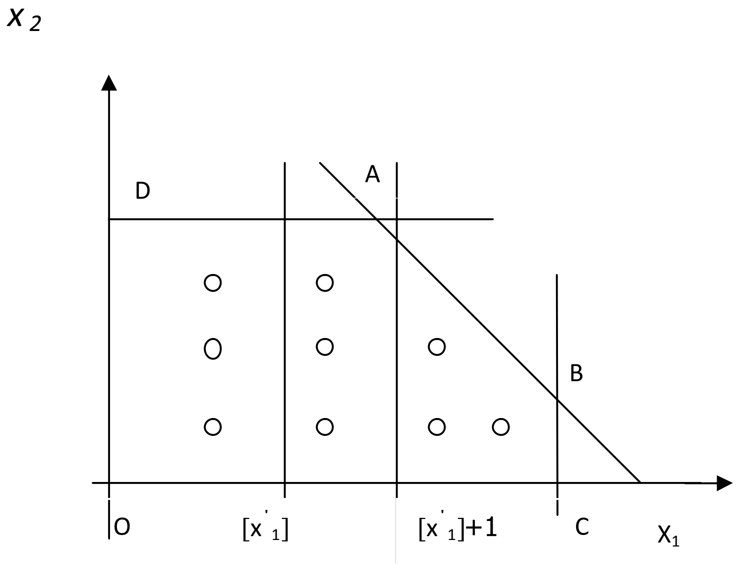

Рис.3.1 Графічне пояснення методу гілок та меж

Опишемо алгоритм методу гілок та меж:

1. Симплексним методом розв'язують задачу (3.1)—(3.3) (без вимог цілочисловості змінних). Якщо серед елементів умовно- оптимального плану немае дробових чисел, то розв'язок є оптимальним планом задачі цілочислового програмування (3.1)— (3.4).

Якщо задача (3.1)—(3.3) не має розв'язку (цільова функція необмежена, або система обмежень несумісна), то задача (3.1)-(3.4) також не має розв'язку.

2. Коли в умовно-оптимальному плані є дробові значення, то вибирають одну з нецілочислових змінних x'_j і визначають її цілу частину $[x'_j]$.

3. Записують два обмеження, що відтинають нецілочислові розв'язки:

$$x_1 \le [x'_1],$$
$$x_1 \ge [x'_1] + 1$$

4. Кожну з одержаних нерівностей приєднують до обмежень початкової задачі. В результаті отримують дві нові цілочислові задачі лінійного програмування.

5. У будь-якій послідовності розв'язують обидві задачі. У разі, коли

отримано цілочисловий розв'язок хоча б однієї із задач, значення цільової функції цієї задачі зіставляють з початковим значенням. Якщо різниця не більша від заданого числа ε, то процес розв'язування може бути закінчено. У разі, коли цілочисловий розв'язок одержано в обох задачах, то з розв'язком початкової зіставляється той, який дає краще значення цільової функції. Якщо ж в обох задачах одержано нецілочислові розв'язки, то для дальшого гілкування вибирають ту задачу, для якої здобуто краще значення цільової функції і здійснюють перехід до кроку 2.

Приклад 3.2. Сільськогосподарське підприємство планує відкрити сушильний цех на виробничій площі 190 м^2, маючи для цього 100 тис. грн. і можливість придбати устаткування двох типів A і B. Техніко – економічну інформацію стосовно одиниці кожного виду устаткування подано в табл.3.1:

Таблиця 3.1

Показник	Устаткування		Ресурс
	A	B	
Вартість, тис. грн.	25	10	100
Необхідна виробнича площа, м^2	40	20	190
Потужність, тис. грн. / рік	350	150	–

Розв'язання. Позначимо x_1 і x_2 - кількість комплектів устаткування відповідно типу A і B.

Запишемо економіко – математичну модель задачі:

$$\max \boldsymbol{Z} = 350\boldsymbol{x}_1 + 150\boldsymbol{x}_2,$$
$$25\boldsymbol{x}_1 + 10\boldsymbol{x}_2 \le 100;$$
$$40\boldsymbol{x}_1 + 20\boldsymbol{x}_2 \le 190;$$
$$\boldsymbol{x}_1 \ge 0, \boldsymbol{x}_2 \ge 0,$$
$$\boldsymbol{x}_1 \ \boldsymbol{i} \ \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{цілі\ числа}.$$