Тема 4
Теорія двоїстості та двоїсті оцінки в аналізі розв'язків лінійних оптимізаційних моделей

Дві задачі лінійного програмування називаються двоїстими, якщо виконуються такі умови:

1. Матриці системи обмежень двох задач є транспонованими одна відносно іншої.
2. Система обмежень складається з нерівностей, які в обох задачах направлені у протилежні боки.
3. Коефіцієнти оптимізуючої форми однієї задачі є вільними членами системи обмежень другої задачі і навпаки.
4. Форми в обох задачах оптимізуються протилежно: перша – на максимум, друга – на мінімум.

Зв'язок розв'язків взаємноспряжених задач лінійного програмування полягає у тому, що, розв'язуючи симплексним методом одну з них, автоматично отримують розв'язок другої задачі. Оптимальні розв'язки двоїстих задач збігаються.

Надамо приклади основної (вихідної) та двоїстої (до вихідної) задачі:

Основна задача		Двоїста задача
	(стандартна, або симетрична, форма)	
	4	
мінімізувати		максимізувати
	3	
$Z = f(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j,$		$Z^* = \varphi(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i,$
за умов	2	за умов
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$	1	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge C_j$
$i = 1, 2, 3 \ldots m;$		$j = 1, 2, 3 \ldots n;$
$x_j \ge 0,$		$y_i \ge 0,$
$j = 1, 2, 3 \ldots n.$		$i = 1, 2, 3 \ldots m.$

мінімізувати	максимізувати
$Z = f(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j,$	$Z^* = \varphi(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i,$
за умов	за умов
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ji} y_i \ge C_j,$
$i = 1, 2, 3 \ldots m;$	$j = 1, 2, 3 \ldots n;$
$x_j \ge 0,$	$y_i \ge 0,$
$j = 1, 2, 3 \ldots n.$	$i = 1, 2, 3 \ldots m.$
Основна задача	Двоїста задача
n – змінних,	m – змінних,
m – обмежень	n – обмежень

$$z_{\min} = f_{\min}(x) \equiv z^*_{\max} = \varphi_{\max}(y)$$

(канонічна форма основної задачі, стандартна – двоїстої)

Економічна інтерпретація двоїстості задачі лінійного програмування пояснена на прикладі 11.

Приклад 11

Розглянемо приклад виробничої задачі. Підприємство може виго-

Таблиця 13

Ресурси підприємства

Ресурси	**Продукція, x_j**			**Обсяг ресурсів**	**Вартість одиниці ресурсу, y_i**
	$x_1(y_4)$	$x_2(y_5)$	$x_3(y_6)$		
Робоча сила, людино-години	15 a_{11}	20 a_{12}	25 a_{13}	1200 b_1	$y_1(x_4)$
Сировина, т	2 a_{21}	3 a_{22}	2,5 a_{23}	150 b_2	$y_2(x_5)$
Енерговитрати, кВт-години	35 a_{31}	60 a_{32}	60 a_{33}	3000 b_3	$y_3(x_6)$
Вартість одиниці продукції	300 c_1	250 c_2	450 c_3	–	–

товити три різновиди продукції. Обсяг ресурсів обмежений, вартість продукції та витрати на кожен з різновидів продукції відомі і наведені у табл. 13.

Потрібно знайти кількість кожного з різновидів продукції, які за-

Пряма задача	Двоїста задача
Цільова функція задачі	
$\max Z = 300x_1 + 250x_2 + 450x_3;$	$\min Z^* = 1200y_1 + 150y_2 + 3000y_3;$
Функціональні обмеження	
$\begin{cases} 15x_1 + 20x_2 + 25x_3 \le 1200\,; \\ 2x_1 + 3x_2 + 2{,}5x_3 \le 150; \\ 35x_1 + 60x_2 + 60x_3 \le 3000; \end{cases}$	$\begin{cases} 15y_1 + 2y_2 + 35y_3 \ge 300\,; \\ 20y_1 + 32y_2 + 60y_3 \ge 250; \\ 25y_1 + 2{,}5y_2 + 60y_3 \ge 450; \end{cases}$
Нефункціональні обмеження	
$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;$	$y_1 \ge 0;\ y_2 \ge 0;\ y_3 \ge 0;$
Розв'язок задачі складає	
$Z(x^*) = Z(60;\ 0;\ 12;\ 0;\ 0;\ 180) = 23400;$	$Z^*(y^*) = Z^*(12;\ 60;\ 0;\ 0;\ 170;\ 0) = 23400;$
$x_1 = 60;\ x_2 = 0;\ x_3 = 12;$	$y_1 = 12;\ y_2 = 60;\ y_3 = 0;$
$x_4 = 0;\ x_5 = 0\ ;\ x_6 = 180.$	$y_4 = 0;\ y_5 = 170\ ;\ y_6 = 0.$

безпечують найбільшу вартість загальної продукції.

Розв'язок задачі

Запишемо економіко-математичні моделі прямої та двоїстої задач: позначимо x_j – кількість одиниць “j”*-ї продукції;* y_i – вартість одиниці “i”*-го ресурсу;* тоді:

Задачу двоїстості за Л.В. Канторовичем сформулюємо таким чином: якою повинна бути ціна “y_i” (i =1, 2,...m) одиниці кожного з ресурсів, щоб при заданих запасах “b_i” та прибутках від одиниці продукції “C_j” мінімізувались загальні витрати

$$z^* = \varphi(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i\,,$$

або у нашому прикладі

$$z^* = 1200y_1 + 150y_2 + 3000y_1.$$

Змінні “y_i” розглядають як ціни, але вони мають назву неявних, облікових, об'єктивно зумовлених. Вартість ресурсів, що витрачаються на виготовлення одиниці продукції “x_j”, дорівнює

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + ... + a_{mj} \geq C_j.$$

З економічної точки зору вартість ресурсів, використаних на виготовлення одиниці продукції, не може бути меншою, ніж вартість самої одиниці продукції. Для якої завгодно виробничої програми вартість виробленої продукції не перевищує загальної вартості наявних ресурсів.

Проаналізуємо отримані результати. Розв’язок прямої задачі вказує на те, що необхідно виробити першого виду продукції $x_1 = 60$ одиниць, третього виду продукції $x_3 = 12$ одиниць, другий вид продукції виробляти не потрібно ($x_2 = 0$).

Повністю використані ресурси робочої сили ($x_4 = 0$) та сировини ($x_5 = 0$), залишок енерговитрат складає $x_6 = 180$ кВт-годин. Розв’язок двоїстої задачі вказує на те, що перший ($y_1 > 0$) та другий ($y_2 > 0$) ресурси використані повністю, третій маємо в надлишку ($y_3 = 0$). Додаток першого обмеженого ресурсу на одиницю збільшує цільову функцію прямої задачі на 12 одиниць (зростає вартість, бо ($y_1 = 12$)), другого обмеженого ресурсу на одиницю збільшує $z(x)$, цільову функцію, на 60 одиниць ($y_2 = 60$). Збільшення третього ресурсу (необмеженого) – енерговитрат – навколо оптимального плану не викликає змін цільової функції. Виробництво продукції першого та третього виду продукції не є збитковим, якщо $y_4 = 0$, $y_6 = 0$; якщо $y_5 = 170$ – це означає, що виготовлення одиниці другого виду продукції викликає збиток у розмірі 170 грошових одиниць. Перевіримо це таким чином: вартість ресурсів на другу продукцію складає

$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 = 20 \cdot 12 + 3 \cdot 60 + 60 \cdot 0 = 420,$$

одночасно вартість другого виробу складає 250; тобто збиток дорівнює 420 – 250 = 170 грн.

Арифметична перевірка задач

Основна задача:

15 · 60 + 20 · 0 + 25 · 12 = 1200	$x_4 = 0$	$y_1 = 12 > 0$
2 · 60 + 3 · 0 + 2,5 · 12 = 150	$x_5 = 0$	$y_2 = 60 > 0$
35 · 60 + 60 · 0 + 60 · 12 = 2820 < 3000	$x_6 = 180 > 0$	$y_3 = 0$

Двоїста задача:

$15 \cdot 12 + 2 \cdot 60 + 35 \cdot 0 = 300$	$y_4 = 0$	$x_1 = 60 > 0$
$20 \cdot 12 + 3 \cdot 60 + 60 \cdot 0 = 420 > 250$	$y_5 = 170 > 0$	$x_2 = 0$
$25 \cdot 12 + 2{,}5 \cdot 60 + 60 \cdot 0 = 450$	$y_6 = 0$	$x_3 = 12 > 0$

Стійкість оптимальних планів прямої та двоїстої задач обумовлена зміною обмежень “Δb_i” та “ΔC_j”, які не викликають порушення умов оптимуму. У нашому прикладі $\Delta b_3 < 180$; відповідно $\Delta C_2 < 170$; $\Delta b_2 = \Delta b_1 = 0$. Це означає, що збільшення без обмежень та зменшення менш ніж на 180 енерговитрат не змінюють оптимального плану задачі.

В оптимальному плані двоїстої задачі значення змінної (y^*_i) чисельно дорівнює частковій похідній функції $\varphi_{max}(b_1, b_2,\ldots,b_m)$ за аргументом “y^*_i”, тобто

$$\frac{\partial \varphi_{\max}}{\partial b_i} = y_i^*.$$

Це співвідношення вказує на те, що зміна “b_i” викликає зміну φ_{max}, яка визначається зміною “y^*_i”. З наведеного вище прикладу можна зробити наступний висновок: коли обмеження не є критичним, тоді зміна “b_i” ресурсу навколо оптимального плану не викликає зміни цільової функції. Тому важливо визначити інтервали зміни кожного з вільних членів системи обмежень основної задачі, або коефіцієнтів цільової функції двоїстої задачі, у яких оптимальний план двоїстої задачі не змінюється. Це має місце для усіх значень ($b_i + \Delta b_i$), при яких стовпець вектора $\mathbf{P_0}$ останньої симплекс-таблиці розв’язання основної задачі не містить від’ємних чисел, тобто коли серед компонентів вектора

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} b_1 + \Delta b_1 \\ b_2 + \Delta b_2 \\ \ldots \\ b_n + \Delta b_n \end{pmatrix}$$

відсутні від’ємні значення. Матриця $\mathbf{B}^{-1}$ – зворотна матриці $\mathbf{B}$, яка утворена з компонентів векторів базису, що визначає оптимальний план основної задачі лінійного програмування.

Таким чином, якщо знайдено оптимальне рішення основної задачі лінійного програмування, тоді не важко провести аналіз стійкості двоїстих оцінок відносно зміни “b_i”, оцінити ступінь впливу зміни “b_i” на оптимальне значення цільової функції основної задачі, а також обрати найбільш ефективний варіант можливих змін “b_i”.

Приклад 12

Розглянемо приклад побудови та розв’язання двоїстої задачі на прикладі задачі з двома невідомими та двома обмеженнями:

Пряма задача:

$$z = 3x_1 + 2x_2; \to \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 6; \\ x_1 + 2x_2 \le 4; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,2.$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 4; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

$$z(0;\ 0;\ 6;\ 4) =$$

базисне припустиме рішення.
Базисні невідомі:
$x_3 = 6;\ x_4 = 4.$
Вільні змінні:
$x_1 = 0;\ x_2 = 0;$

$$z^* = 3x_1 + 2x_2 = 7{,}2;$$

$$x_1^* = 1{,}6;\ x_2^* = 1{,}2.$$

Двоїста задача:

$$z^* = 6y_1 + 4y_2; \to \min,$$

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 \ge 3; \\ y_1 + 2y_2 \ge 2; \end{cases}$$

$$y_i \ge 0, i = 1,2.$$

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 - y_3 = 3; & (1) \\ y_1 + 2y_2 - y_4 = 2; & (2) \end{cases}$$

$$y_i \ge 0,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

$$z^*(0;\ 0;\ -3;\ -2) =$$

базисне неприпустиме рішення.
Базисні невідомі:
$y_3 = –3;\ y_4 = –2.$
Вільні змінні:
$y_1 = 0;\ y_2 = 0.$

$$-z^* = -6y_1 - 4y_2; \to \max.$$

За умов обмежень:

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 - y_3 = 3; & (1) \\ y_1 + 2y_2 - y_4 = 2; & (2) \end{cases}$$

$$y_i \ge 0,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

$$z^*(0;\ 0;\ -3;\ -2).$$

Перший крок

З рівнянь-обмежень знайдемо одну з вільних змінних, яку залучимо у базисне з метою отримання припустимого базисного рішення. Нехай це буде y_1:

$$y_3 = –3 + 3y_1 + y_2 = 0;$$

$$y_1 = 1 - {}^1\!/_3 y_2 + {}^1\!/_3 y_3;\ y_2 = y_3 = 0,\ y_1 = 1; \qquad (1)$$

$$y_4 = -2 + y_1 + 2y_2 = 0;$$

$$y_1 = 2 - 2y_2 + y_4;\ y_2 = y_4 = 0,\ y_1 = 2; \qquad (2)$$

обираємо вільні змінні $y_2 = y_3 = 0$;
базисні змінні $y_1 = 1$; y_4;

$$y_4 = -2 + (1 - {}^1\!/_3 y_2 + {}^1\!/_3 y_3) + 2y_2 = -1 + {}^5\!/_3 y_2 + {}^1\!/_3 y_3; \qquad (2)$$

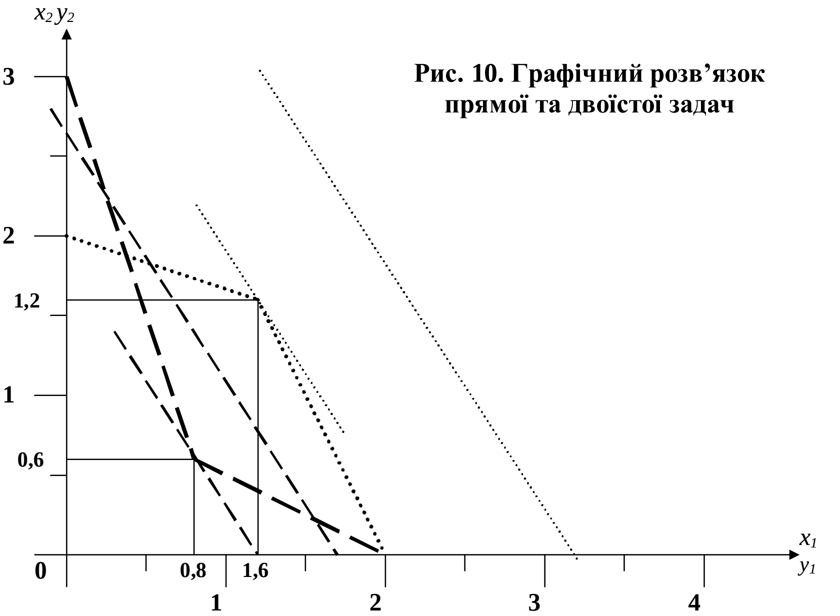

Рис. 10. Графічний розв'язок прямої та двоїстої задач

$$y_1 = 1 - {}^1\!/_3 y_2 + {}^1\!/_3 y_3; \qquad (1)$$

надамо вираз цільової функції через нові вільні змінні $y_2 = y_3 = 0$;

$$-z^* = -6(1 - \frac{1}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3) - 4y_2 = -6 - 2y_2 - 2y_3; \to \max.$$

$$-z^*(1;\ 0;\ 0;\ -1)$$

– неприпустиме базисне рішення, бо $y_4 = -1$.

Другий крок

Залучимо до базису вільну змінну y_2 з (2) рівняння-обмеження:

$$y_4 = -1 + {}^5/_3 y_2 + {}^1/_3 y_3 = 0; \qquad (2)$$

$$y_2 = {}^3/_5 - {}^1/_5 y_3 + {}^3/_5 y_4; \; y_3 = 0; \; y_4 = 0;$$

$$y_1 = 1 - {}^1/_3({}^3/_5 - {}^1/_5 y_3 + {}^3/_5 y_4) + {}^1/_3 y_3 = {}^4/_5 + {}^6/_{15} y_3 - {}^1/_5 y_4; \quad (1)$$

базисні змінні:

$$y_1 = 4/5; \; y_2 = 3/5;$$

$$-z^* = -6 - 2({}^3/_5 - {}^1/_5 y_3 + {}^3/_5 y_4) - 2y_3 =$$

$$= 7{,}2 - 1{,}6 \; y_3 - 1{,}2 \; y_4 \to \max;$$

$$-Z^* (0{,}8 ; \; 0{,}6 ; 0; 0);$$

вільні змінні: $y_3 = y_4 = 0$;

припустиме базисне рішення, –1,6 та –1,2 – від’ємні і збільшувати $-z^*$ нема куди, тому це максимальне значення

$$-z^* = -7{,}2, \; z^* = 7{,}2 \to \min, \; z^*_{\min} = (0{,}8 ; \; 0{,}6 ; 0; 0;);$$

$$(z^*_{\min}(y_1; y_2; y_3; y_4)).$$

Розв’язок прямої задачі

$$x_1 = 1{,}6; \; x_2 = 1{,}2;$$

$$z_{\max} = 3x_1 + 2x_2 = 3 \cdot 1{,}6 + 2 \cdot 1{,}2 = 7{,}2 ,$$

$$z_{\max} = (1{,}6 ; \; 1{,}2 ; 0; 0);$$

$$(Z_{\max}(x_1, x_2, x_3, x_4));$$

$$z = 7{,}2 - 0{,}8 \; x_3 - 0{,}6 \; x_4 \to \max$$

Співвідношення невідомих прямої та двоїстої задач:

Пряма задача	x_1	x_2	x_3	x_4
Двоїста задача	y_3	y_4	y_1	y_2

Таблиця 14

Симплекс-таблиця

№ ітер.	i	Базис	$\mathbf{C}_б$	$\mathbf{P}_0$ (bi)	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	$-\mathbf{P}_i/a_{ij}$
					P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	Симпл.
					–350	–240	–150	110	1400	$-M$	$-M$	$-P_i/a_{ij}$
1	1	P_6	$-M$	–10	–1	–2	–1	1	10	1	0	–
	2	P_7	$-M$	–20	–3,5	–0,5	–1	1	20	0	1	100
	3			0	350	240	150	–110	–1400	0	0	
2	2	P_1	–350	5,7143	1	0,1429	0,2857	–0,2857	–5,7143	0	–0,2857	–
	1	P_6	$-M$	–4,2857	0	–1,857	–0,7143	0,7143	4,2857	1	–0,2857	70
	3			–2000	0	190	50	–10	600	0	100	
3	2	P_1	–350	4	1	–0,6	0	0	–4	0,4	–0,4	
	1	P_3	–150	6	0	2,6	1	–1	–6	–1,4	0,4	
	3			–2300	0	60	0	40	900	70	80	

$$-z^* = -2300 - 4y_1 - 6y_3;$$

$$-z^* = (0;\ 60;\ 0;\ 40;\ 900;\ 70;\ 80) = (y_1;\ y_2;\ y_3;\ y_4;\ y_5;\ y_6;\ y_7);$$

$$z^* = 2300;\ y_6 = 70;\ y_7 = 80$$

Графічний розв’язок прямої та двоїстої задач наведено на рис. 10.

Приклад 13

Розглянемо побудову та розв’язок двоїстої задачі на прикладі малого підприємства.

Математична модель основної задачі:

$$z = f(x) = 10x_1 + 20x_2 \to \max;$$

$$x_1 + 3{,}5x_2 \le 350; \quad (1)$$

$$2x_1 + 0{,}5x_2 \le 240; \quad (2)$$

$$x_1 + x_2 \le 150; \quad (3)$$

$$x_1 + x_2 \ge 110; -x_1 - x_2 \le -110; \quad (4)$$

$$10x_1 + 20x_2 \ge 1400; -10x_1 - 20x_2 \le -1400; \quad (5)$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,\ 2.$$

Математична модель двоїстої задачі:

$$z^* = \varphi(y) = 350y_1 + 240y_2 + 150y_3 - 110y_4 - 1400y_5; \to \min;$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 - y_4 - 10y_5 \ge 10; \\ 3{,}5y_1 + 0{,}5y_2 + y_3 - y_4 - 20y_5 \ge 20; \end{cases}$$

$$y_i \ge 0,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 5.$$

Перетворимо двоїсту задачу з задачі мінімізації на задачу максимізації:

$$-z^* = -\varphi(y) = -350y_1 - 240y_2 - 150y_3 + 110y_4 + 1400y_5; \to \max.$$

За умов обмежень:

$$-y_1 - 2y_2 - y_3 + y_4 + 10y_5 - y_6 \le -10; \quad (1)$$

$$-3{,}5y_1 - 0{,}5y_2 - y_3 + y_4 + 20y_5 - y_7 \le -20; \quad (2)$$

$$y_i \geq 0,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ ...,\ 7.$$

Розв'яжемо задачу двоїстим симплекс-методом (табл. 14).

Приклад 14.

$$z = f(x) = 10x_1 + 20x_2 \to \max;$$

$$x_1 + 3{,}5x_2 \leq 350; \qquad (1)$$

$$2x_1 + 0{,}5x_2 \leq 240; \qquad (2)$$

$$x_1 + x_2 \leq 150; \qquad (3)$$

$$x_1 + x_2 \geq 110; \qquad (4)$$

$$10x_1 + 20x_2 \geq 1400; \qquad (5)$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,\ 2.$$

Перетворимо задачу на задачу з обмеженнями типу "≤" (max):

$$x_1 + 3{,}5x_2 \leq 350; \qquad (1)$$

$$2x_1 + 0{,}5x_2 \leq 240; \qquad (2)$$

$$x_1 + x_2 \leq 150; \qquad (3)$$

$$-x_1 - x_2 \leq -110; \qquad (4)$$

$$-10x_1 - 20x_2 \leq -1400; \qquad (5)$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,\ 2;$$

$$z = 10x_1 + 20x_2 \to \max. \qquad (0)$$

Побудуємо двоїсту задачу лінійного програмування:

$$z^* = \varphi(y) = 350y_1 + 240y_2 + 150y_3 - 110y_4 - 1400y_5; \to \min;$$

за умови обмежень:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 - y_4 - 10y_5 \geq 10; \\ 3{,}5y_1 + 0{,}5y_2 + y_3 - y_4 - 20y_5 \geq 20; \end{cases}$$

Таблиця 15

Симплекс–таблиця

№ ітер.	i	Ба-зис	$\mathbf{C}_б$	$\mathbf{P}_0$	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	$\mathbf{P}_0/a_{ij}$
					–350	–240	–150	110	1400	0	0	$-M$	$-M$	Симпл.
				(b_i)	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	b_i/a_{ij}
1	1	P_8	$-M$	10	1	2	1	–1	–10	–1	0	1	0	10
	2	P_9	$-M$	20	3,5	0,5	1	–1	–20	0	–1	0	1	5,71
	3			0	350	240	150	–110	–1400	0	0	0	0	
	4			–30	–4,5	–2,5	–2	–2	30	1	1	0	0	
2	1	P_8	$-M$	4,2857	0	1,857	0,7143	–0,7143	–4,2857	–1	0,2857	1	–0,857	2,31
	2	P_1	–350	5,7143	1	0,1429	0,2857	–0,2857	–5,7143	0	–0,2857	0	0,2857	40
	3			–2000	0	190	50	–10	600	0	100	0	–100	
	4			–4,2857	0	–1,857	–0,7143	0,7143	4,2857	1	–0,2857	–1	0,2587	
3	1	P_2	–240	2,3079	0	1	0,3846	–0,3846	–2,3079	–0,5385	0,1539	0,5385	–0,1539	6
	2	P_1	–350	5,3845	1	0	0,2310	–0,2310	–5,3845	0,077	–0,308	–0,077	0,308	23,3
	3			–2440	0	0	–23,154	63,15	1040	102,3	70,9	–102,3	–70,9	
	4			–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	
4	1	P_3	–150	6	0	2,6	1	–1	–6	–1,4	0,4	1,4	–0,4	
	2	P_1	–350	4	1	–0,6	0	0	–4	0,4	–0,4	–0,4	0,4	
	3			–2300	0	60	0	40	900	70	80	–70	–80	

$$-z^* = -2300 - 4y_1 - 6y_3;$$

$$-z^* = (0, 60, 0, 40, 900, 70, 80, 0, 0) = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9);$$

$$z^* = 2300, y_6 = 70, y_7 = 80$$