Тема 2
Загальна задача
лінійного програмування

У загальному вигляді розв'язання задачі математичного програмування майже неможливе. Задачі лінійного програмування вивчені досконало. Це пояснюється тим, що більшість реальних економічних моделей зводиться до задачі лінійного програмування, внаслідок чого і методи розв'язку задач лінійного програмування найбільш розвинені.

Загальною задачею лінійного програмування є задача знаходження максимального (мінімального) значення функції

$$z = \sum_{j=1}^{n} C_j \cdot X_j, \ \ (z = C_0 + C_1 x_1 + C_2 x_2 + \ldots + C_n x_n)$$

за умов функціональних обмежень:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots, k; \quad \left(\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k \end{cases} \right);$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = k+1, \ k+2, \ \ldots, \ \ m;$$

$$\left(\begin{cases} a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1}, \\ a_{k+2,1}x_1 + a_{k+2,2}x_2 + \ldots + a_{k+2,n}x_n = b_{k+2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots, \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases} \right),$$

нефункціональних обмежень:

$$X_j \geq 0, \ j = 1, \ 2, \ 3, \ \ldots, \ \ n;$$

де $a_{ij;}$ $b_{i;}$ C_j – задані постійні величини, $k \leq$ m.

Цільову функцію можливо оптимізувати на “max” або на “min” – це не є принципово, бо у точці X^* функція $Z = f\,(x^*)$ – досягає мінімуму, а функція $Z = -f\,(x^*)$ – досягає максимуму. Таким чином, є завжди можливість мінімізувати цільову функцію, не втрачаючи загальності підходу.

Цільова функція та всі функціональні обмеження мають лінійну форму відносно невідомих X_j, що і дає назву цій задачі математичного програмування – лінійне програмування.

Невідомі, які присутні у лінійній моделі, відповідно до нефункціональних обмежень невід’ємні, що теж не обмежує загальності підходу, бо є можливість завжди записати в іншому вигляді $X_j = -(X_j)^-$, де $(X_j)^-$ – від’ємне значення.

У залежності від вигляду функціональних обмежень (нерівності або рівності) загальну задачу лінійного програмування поділяють:

- на канонічну, якщо $k = 0$; $l = n$, де всі функціональні обмеження мають вигляд рівностей;
- стандартну (симетричну), якщо $k = m$; $l = n$, де всі функціональні обмеження мають вигляд нерівностей.

Будь-яку задачу лінійного програмування можна звести до канонічної задачі шляхом перетворення функціональних обмежень нерівностей у обмеження рівності додаванням до нерівностей невідомих невід'ємних величин:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n + y_i = b_i;$$

де $y_i \geq 0$; новим невідомим додають назви відповідно x_{n+1}; x_{n+2}; …; x_{n+m} та відповідно $X_j \geq 0$, $j = 1, 2, 3, …, n; n + 1, …, n + m$;

функціональні обмеження набувають вигляду:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_j = b_i, i = 1,\ 2,\ 3,\ ...,\ m;$$

$$\left(\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ ...., \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \end{cases}\right).$$

Кількість невідомих моделі $X_j \geq 0$ збільшилась до $n + m$.

Будь-яку задачу лінійного програмування можна звести до стандартної задачі лінійного програмування шляхом віднімання з лівої частини рівняння додаткових невід'ємних невідомих величин.

Таким чином, задача лінійного програмування може бути зведена від мінімізації до максимізації; здійснений перехід від функціональних обмежень у вигляді нерівностей до обмежень-рівностей і навпаки; замінені невідомі змінні від'ємні на невід'ємні.

Введені додаткові невідомі змінні мають чіткий економічний зміст. Так, наприклад, якщо в обмеженнях задачі лінійного програмування (нерівність) відбиваються витрати ресурсу та їх наявність, то додаткова змінна задачі (у формі рівняння) дорівнює обсягу невитраченого відповідного ресурсу. Якщо змінна не є невід'ємною, то її можливо замінити на дві невід'ємні:

$$x_i = U_i - V_i.$$

Система обмежень у вигляді рівностей сумісна, якщо є хоча б одне рішення; несумісна, якщо ранг матриці

$$\left|a_{ij}\right|, \;\; i = 1, \; 2, \; \ldots, \; m; \, j = 1, \; 2, \; 3, \; \ldots, \; n$$

дорівнює (r), а ранг розширеної матриці (доданий стовпець "b_i") більш ніж (r); надмірна, якщо одне з рівнянь можна отримати як лінійну комбінацію інших. У системі:

- n – кількість невідомих;
- m – кількість рівнянь.

Якщо система сумісна та не є надмірною, будемо вважати, що ранг її дорівнює (m); тоді:

- m – базисні змінні;
- $(n - m)$ – вільні змінні, $m < n$.

Система у даному випадку має нескінченну кількість розв'язків, тому що ми маємо можливість надавати вільним змінним будь-які значення.

Рішення системи рівнянь (обмежень) має назву базисного рішення, якщо всі вільні змінні дорівнюють нулю. Сукупність значень невідомих (чисел) задачі математичного програмування, які задовольняють усім обмеженням задачі, має назву – припустимого рішення, або плану.

Сукупність усіх припустимих рішень системи рівнянь є опуклою множиною, або множина розв'язків задачі лінійного програмування є опуклою.

Базисне припустиме рішення задачі лінійного програмування відповідає одній з вершин або граней множини розв'язків.

Оптимальне рішення задачі лінійного програмування відповідає одному з базисних припустимих рішень, тобто досягається у одній з вершин або граней множини розв'язків, має назву – оптимальний план задачі лінійного програмування.

Геометричну інтерпретацію множини допустимих розв'язків задачі лінійного програмування та графічний метод її розв'язання приведено у прикладі 6.

Приклад 6

Розглянемо задачу лінійного програмування у формі стандартної задачі – з обмеженнями у вигляді нерівностей. З метою наочності розглянемо простий випадок з двома невідомими змінними. Пригадаємо задачу про планування випуску продукції малим підприємством.

$$z(x) = 10x_1 + 20x_2, \quad z \to \max,$$

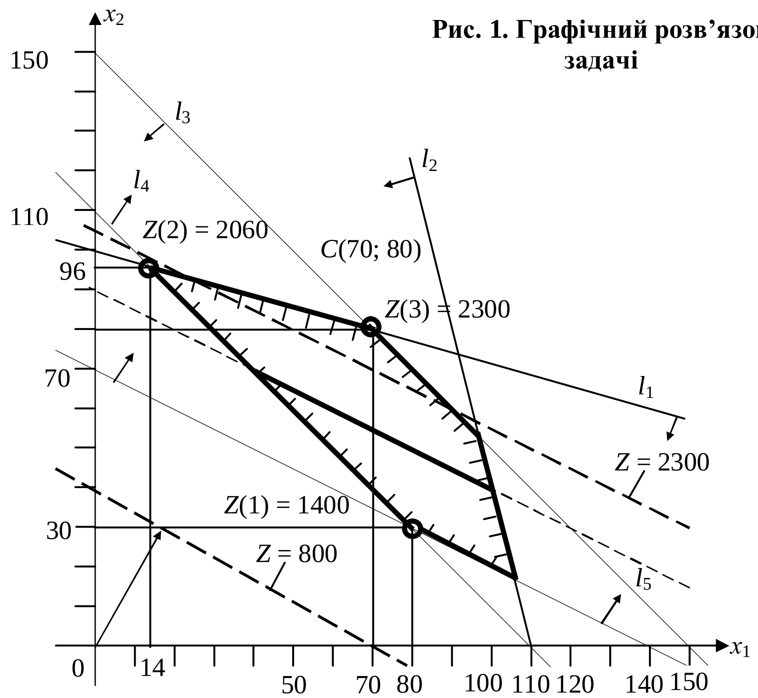

Рис. 1. Графічний розв'язок задачі

$$\begin{cases} x_1 + 3{,}5x_2 \le 350; & - \; l_1 \\ 2x_1 + 0{,}5x_2 \le 240; & - \; l_2 \\ x_1 + x_2 \le 150; & - \; l_3 \\ x_1 + x_2 \ge 110; & - \; l_4 \\ 10x_1 + 20x_2 \ge 1400; & - \; l_5 \\ x_1 \ge 0; & - \; l_6 \\ x_2 \ge 0. & - \; l_7 \end{cases}$$

Нерівність – обмеження графічно відображається півплощиною, а границя – граничною прямою, рівняння якої утворюється перетворенням нерівності на рівняння $l_1 \to x_1 + 3{,}5x_2 = 350$; $x_1 = 0$, $x_2 = 350/3{,}5 = 100$; $x_1 = 350$, $x_2 = 0$ (рис. 1).

Щоб з'ясувати, яка півплощина задовольняє нерівності, перевіримо, наприклад, чи включає точку (0,0) $x_1 + 3{,}5x_2 \le 350$; напівплощина нижче граничної прямої – нерівність виконується – напівплощина нижче границі.

Таким чином перевіримо та побудуємо інші нерівності:

$$l_2 \to 2x_1 + 0{,}5x_2 = 240;$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = 240/0{,}5 = 480;\ x_2 = 0,\ x_1 = 240/2 = 120;$$

$$l_3 \to x_1 + x_2 = 150;$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = 150;\ x_2 = 0,\ x_1 = 150;$$

$$l_4 \to x_1 + x_2 = 110;$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = 110;\ x_2 = 0,\ x_1 = 110;$$

$$l_5 \to 10x_1 + 20x_2 = 1400;$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1400/20 = 70;\ x_2 = 0,\ x_1 = 1400/10 = 40.$$

Але точка (0,0) $10 \cdot 0 + 20 \cdot 0 = 0 \ge 1400$ не відповідає нерівності, тому нам потрібна півплощина вище граничної прямої.

Таким чином отримано багатокутник розв'язків, який є опуклим.

З метою знаходження максимуму цільової функції $z = 10x_1 + 20x_2$ побудуємо лінію рівняння цільової функції, поклавши $z = 0$, $10x_1 +$

+ $20x_2 = 10$; $x_1 = 0$, $x_2 = 40$; $x_2 = 0$, $x_1 = 80$. Зростання цільової функції означає паралельне зміщення графіка функції вгору, доки остання крапка не вийде на границю багатокутника розв'язків.

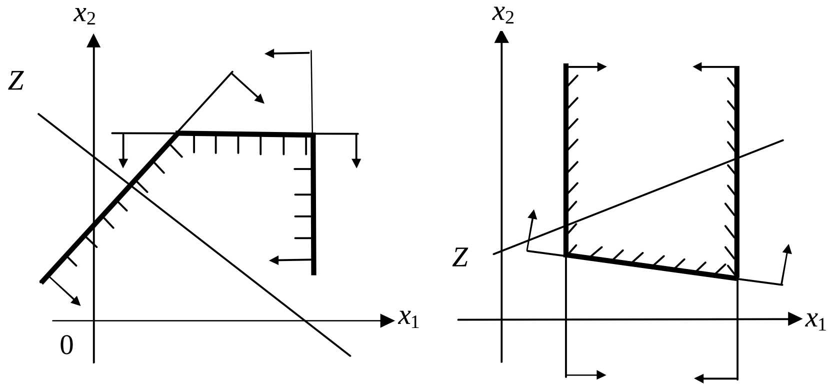

Рис. 2. Необмежені багатокутники розв'язків задачі лінійного програмування

Ця точка відповідає перетину прямих.

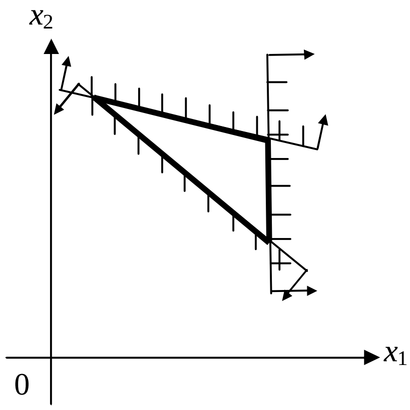

Рис. 3. Багатокутник розв'язків несумісної системи обмежень задачі лінійного програмування

$$\begin{cases} x_1 + 3{,}5x_2 = 350; & - \ l_1 \\ x_1 + x_2 = 150; & - \ l_2 \end{cases}$$

$$x_1 = 70,\ x_2 = 80;$$

$$z_{\max}(x) = 10x_1 + 20x_2 = 10 \cdot 70 + 20 \cdot 80 = 2300 \text{ грн.}$$

Для знаходження мінімального значення цільової функції лінію рівняння потрібно зміщувати вниз, доки остання точка не вийде на границю багатокутника розв'язків – це l_5, усі точки якої є розв'язком задачі – нескінченна множина рішень.

У розглянутому випадку багатокутник розв'язків не тільки опуклий, а ще є і замкнутим. Можливі варіанти опуклого багатокутника розв'язків, який є необмеженим (рис. 2).

У першому випадку можливо знайти максимальне значення цільової функції, а у другому – мінімальне значення. На рис. 3 наведений приклад багатокутника розв'язків несумісної системи обмежень – розв'язок задачі математичного програмування відсутній.

Геометричну інтерпретацію множини припустимих розв'язків задачі лінійного програмування та графічний метод її розв'язання з трьома невідомими змінними приведено у прикладі 7.

Приклад 7

Розглянемо задачу лінійного програмування у формі стандартної задачі. Знайдемо найбільше значення функції трьох невідомих змінних

$$z\,(x) = 3x_1 - 6x_2 + 2x_3,\ z \to \max;$$

при обмеженнях:

$$\begin{aligned} &3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 6; \\ &x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 8; \\ &x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_3 \ge 0. \end{aligned}$$

Побудуємо область припустимих рішень системи лінійних нерівностей, прийнявши до уваги рівняння площин

$$3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 6; \qquad (1)$$

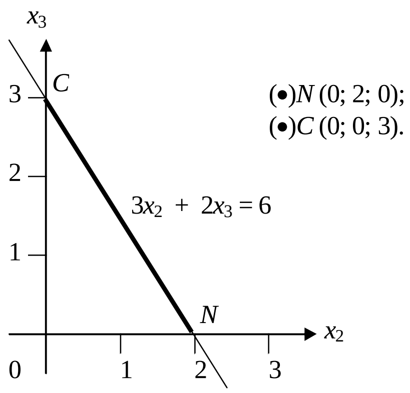

Рис. 4. Слід площини (1)

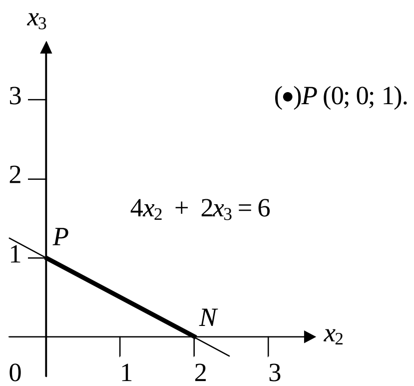

Рис. 5. Слід площини (2)

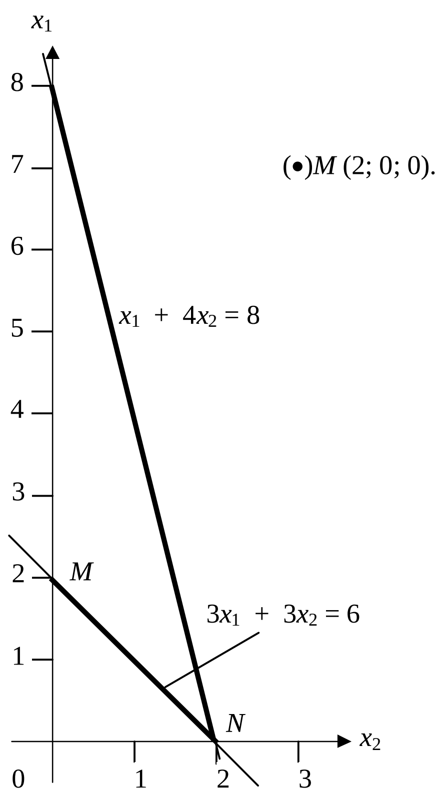

Рис. 6. Сліди площин (1) та (2)

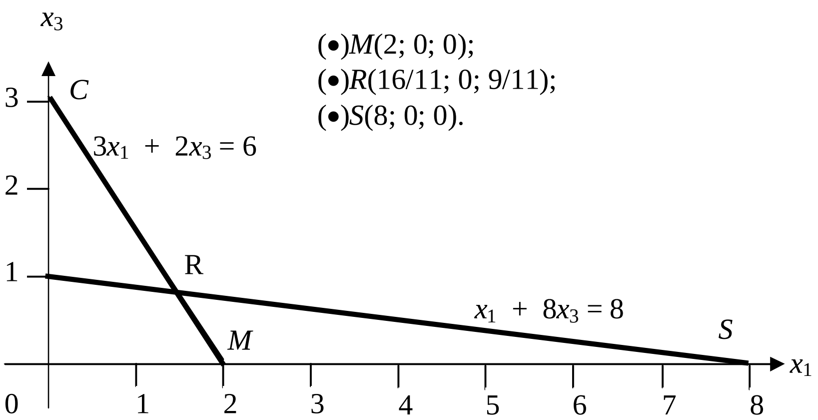

Рис. 7. Сліди площин (1) та (2)

$$x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 8; \qquad (2)$$

$$x_1 = 0;\ x_2 = 0;\ x_3 = 0.$$

Побудуємо сліди перетину площини

$$3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6$$

з кожною із площин $x_1 = 0$; потім $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Як $x_1 = 0$, то рівняння (1) набуває вигляду

$$3x_2 + 2x_3 = 6$$

і у системі координат x_2, x_3 гранична пряма набуває вигляду (рис. 4).

Відповідно рівняння (2) набуває вигляду

$$4x_2 + 8x_3 = 8$$

і гранична пряма у координатах x_2 та x_3 набуває вигляду (рис. 5).

Аналогічно побудуємо сліди перетину площин (1) та (2) з площиною $x_3 = 0$; $3x_1 + 3x_2 = 6$; $x_1 + 4x_2 = 8$ (рис. 6).

Побудуємо сліди перетину площин (1) та (2) з площиною $x_2 = 0$; $3x_1 + 2x_3 = 6$; $x_1 + 8x_3 = 8$ (рис. 7).

Знайдемо точку перетину R слідів площин (1) та (2) на координатній площині $x_1 0 x_3$.

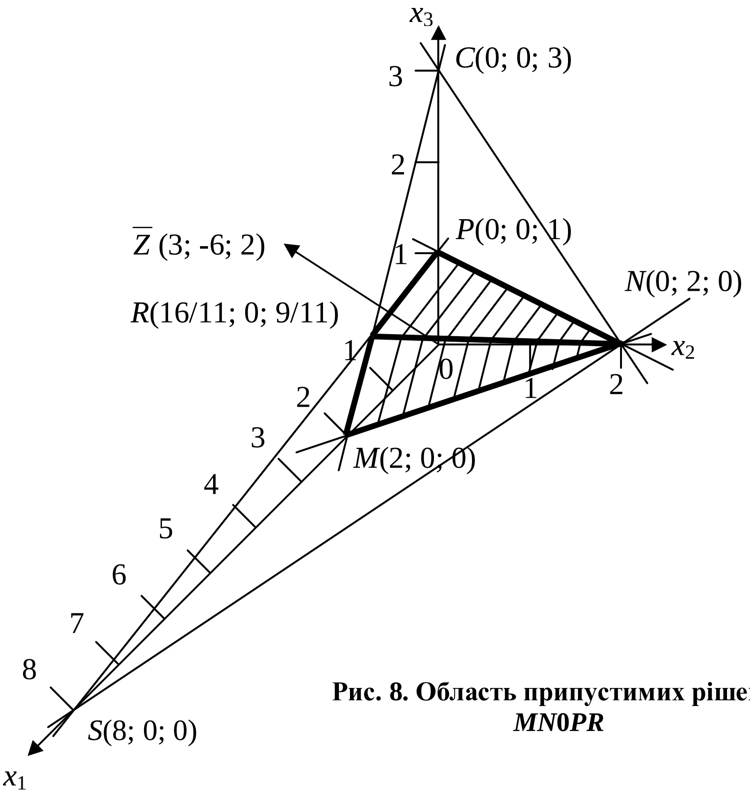

Рис. 8. Область припустимих рішень: *MN0PR*

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_3 = 6; & x_3 = \dfrac{9}{11}; \\ x_1 + 8x_3 = 8; & x_1 = \dfrac{16}{11}. \end{cases}$$

$$R\left(\frac{16}{11};\ 0;\ \frac{9}{11}\right).$$

Побудуємо аксонометричне зображення області припустимих рішень системи лінійних нерівностей.