Тема 1
Предмет, особливості та сфери застосування математичного програмування в економіці. Класифікація задач

Математичне програмування – математична дисципліна, яка займається вивченням методів розв'язування, аналізу та використання задач зі знаходження екстремуму функції на множині допустимих варіантів функції. Математичне програмування використовують при розв'язанні практичних задач, у тому числі й економічних.

Загалом послідовність використання економіко-математичних моделей така:

- формулюється економічна проблема;
- створюється математична модель задачі, у якій логічні зв'язки економічної моделі перетворюються на математичні співвідношення: функції, рівняння, нерівності;
- розв'язується математична задача, перевіряється рішення;
- перекладається розв'язок на економічну мову й аналізується результат.

Математичне програмування – це частковий випадок системного аналізу при наявності однієї чітко вираженої мети, досягнення якої здійснюється за одним критерієм.

У загальному вигляді математичне формулювання задачі виглядає таким чином:

- необхідно знайти найбільше або найменше значення цільової функції

$$f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n), \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ ...,\ n;$$

- треба виконати умови

$$g_j(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \le b_j, \quad j = 1,\ 2,\ 3,\ ...,\ m,$$

де f, g_j – відомі функції, b_j – деякі дійсні числа, $n > m$.

Задачею оптимізації з точки зору економіки є знаходження таких значень змінних, що нададуть критерію ефективності діяльності максимальне чи мінімальне значення, за умов виконання обмежень, які пов'язані зі змінними, за допомогою яких здійснюється управління діяльністю підприємства.

Конкретна мета, поставлена в економічній задачі, пояснюється цільовою функцією (критерієм ефективності), екстремум якої і треба знайти.

Обмеження відображають умови при розв'язанні економічної задачі, наприклад, брак ресурсів, гранична вартість і таке інше. Змінні, з яких будується цільова функція та на які накладаються обмеження, використовують як "інструмент", за допомогою якого досягається той чи інший варіант цілі. Варіант, при якому змінні задовольняють усім обмеженням, називається припустимим (допустимим).

Задача математичного програмування полягає у тому, щоб з усіх допустимих варіантів значень інструментальних змінних (невідомих моделей) знайти такі, при яких функція цілі (критерій оптимальності) досягає екстремуму.

Розв'язком задачі є знаходження її оптимального рішення або з'ясування його відсутності.

Функція цілі (критерій оптимальності) повинна об'єктивно характеризувати суспільно-корисну значимість суспільно-економічного явища або процесу. Критерій оптимальності можливо з'ясувати лише з економічної сутності проблеми – задача, яку розв'язує фахівець-економіст. Принципово неможливо визначити цільову функцію на етапі розв'язання задачі математиком. Такою ж мірою все це стосується також обмежень задачі оптимізації.

Класифікація моделей задач математичного програмування залежить від властивостей функції мети та функцій обмежень.

Якщо функція мети та усі функції обмежень лінійні, то задача математичного програмування має назву задачі лінійного програмування; якщо ж хоча б одна з функцій нелінійна, то задача має назву задачі нелінійного програмування.

Якщо у математичній моделі враховується поетапно час, то це – задача динамічного програмування; в іншому випадку – задача статичного програмування.

У залежності від того, який характер мають вихідні дані моделі – детермінований або стохастичний, задачі мають назву відповідно детермінованого та стохастичного програмування.

Серед задач нелінійного програмування особливо досконало досліджені задачі опуклого програмування – задачі знаходження екстремуму опуклої функції, заданої на опуклій замкненій множині. У свою чергу серед задач опуклого програмування найпростіші і найдосконаліше досліджені задачі квадратного програмування, у яких функція мети – квадратична, а обмеження – лінійні.

Якщо змінні задачі математичного програмування приймають тільки цілочисельні значення, така задача має назву задачі цілочислового програмування; у іншому випадку – задачі неперервного програмування.

У задачі дробово-лінійного програмування цільова функція являє собою співвідношення двох лінійних функцій, а обмеження – лінійні.

Якщо у задачі математичного програмування відсутні усі обмеження, то задача має назву задачі безумовного програмування.

Як приклади економічних проблем, які доцільно розв'язати, використовуючи методи та моделі математичного програмування, розглянемо такі:

Приклад 1

Задача про планування випуску продукції малого підприємства

Планується виробляти жіночі та чоловічі костюми. На жіночий костюм потрібно 1 м вовни, 2 м шовку та 1 людино-тиждень працевитрат. На чоловічий костюм потрібно 3,5 м вовни, 0,5 м шовку та 1 людино-тиждень працевитрат. Загалом підприємство має 350 м вовни, 240 м шовку та 150 людино-тижнів працевитрат. За попередньою домовленістю з замовником мають виробити не менш ніж 110 костюмів жіночих та чоловічих загалом. Акціонери, які вклали гроші у підприємство та сировину (тканину), вимагають прибуток не менш ніж 1400 грн. Замовник купує жіночий костюм на 10 грн. дорожче собівартості, чоловічий – на 20 грн. Потрібно з'ясувати, скільки необхідно виготовити жіночих та чоловічих костюмів, щоб задовольнити усім вимогам та отримати найбільший прибуток.

Розв'язок задачі

Позначимо кількість жіночих костюмів, які потрібно виготовити, через x_1; кількість чоловічих – x_2. Загальний прибуток (критерій оптимізації, мета, ціль) виробництва складає:

$$z = f(x) = 10x_1 + 20x_2.$$

Витрати:

вовни = $1x_1 + 3{,}5x_2$;
шовку = $2x_1 + 0{,}5x_2$;
трудомісткості = $x_1 + x_2$.

Результати:

загальна кількість костюмів $x_1 + x_2$;
прибуток $10x_1 + 20x_2$.

Функціональні обмеження задачі мають вигляд

$$\left.\begin{aligned} &x_1 + 3{,}5x_2 \le 350; \\ &2x_1 + 0{,}5x_2 \le 240; \\ &x_1 + x_2 \le 150 \end{aligned}\right\}$$

обмеження ресурсів (вовна, шовк, трудомісткість);

$$\left.\begin{aligned} &x_1 + x_2 \ge 110; \\ &10x_1 + 20x_2 \ge 1400 \end{aligned}\right\}$$

обмеження (кількість) планового (вартість) завдання.

Нефункціональні обмеження, очевидно, складають:

$$x_1 \geq 0;$$
$$x_2 \geq 0.$$

Розв'язок задачі математичного програмування у даному прикладі складає:

$$x_1 = 70;\ x_2 = 80;\ f_{max}(x) = 2300 \text{ грн.}$$

Приклад 2

Задача про постачання вантажів від постачальників до замовників

Від трьох постачальників, розташованих у пунктах A_1, A_2, A_3, до чотирьох замовників, розташованих у пунктах B_1, B_2, B_3, B_4, треба перевезти однорідний вантаж. Наявність вантажу по пунктах постачальників: $A_1 = 50$, $A_2 = 40$, $A_3 = 20$. Потреба у вантажі: $B_1 = 30$, $B_2 = 25$, $B_3 = 35$, $B_4 = 20$. Відстані між пунктами замовників та постачальників наведені у табл. 1.

Таблиця 1

Відстань між постачальниками та замовниками

Замовники Постачальники		$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	a_i (т)
		B_1	B_2	B_3	B_4	
$i = 1$	A_1	C_{11} 3 x_{11}	C_{12} 2 x_{12}	C_{13} 4 x_{13}	C_{14} 1 x_{14}	$a_1 = 50$
$i = 2$	A_2	C_{21} 2 x_{21}	C_{22} 3 x_{22}	C_{23} 1 x_{23}	C_{24} 5 x_{24}	$a_2 = 40$
$i = 3$	A_3	C_{31} 3 x_{31}	C_{32} 2 x_{32}	C_{33} 4 x_{33}	C_{34} 4 x_{34}	$a_3 = 20$
Потреба, b_j (т)		$b_1 = 30$	$b_1 = 25$	$b_1 = 35$	$b_1 = 20$	110

Розв'язок задачі

Позначимо X_{ij} – кількість вантажу, який буде перевезено з "i"-го пункту постачання у “*j*”-*й пункт замовлення;* C_{ij}– відстань від “*i*”-го постачальника до “*j*”-*го замовника.*

Мета: розшукати варіант перевезення вантажів з найменшими витратами транспортного моменту

$$z = f(x) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} C_{ij} \cdot X_{ij}.$$

Задача збалансована, тобто наявність вантажу дорівнює потребі у вантажу:

$$\sum_{j=1}^{3} X_{ij} = a_i, i = 1,\ 2,\ 3$$

– умова вивезення вантажу від кожного з 3-х постачальників до 4-х замовників;

$$\sum_{i=1}^{4} X_{ij} = b_j, j = 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

– умова отримання кожним замовником необхідної кількості вантажу.

Нефункціональні обмеження: $X_{ij} \geq 0$.

Розв’язок задачі складає:

$X_{11} = 25$; $X_{12} = 5$; $X_{14} = 20$; $X_{13} = 0$;
$X_{21} = 5$; $X_{23} = 35$; $X_{22} = 0$; $X_{24} = 0$;
$X_{31} = 20$; $X_{32} = 0$; $X_{33} = 0$; $X_{34} = 0$;
$f_{\min}(x) = 190$ т/км.

Приклад 3

Задача про раціональний розкрій

Підприємство одержує прут сталевого прокату довжиною $l = 800$ см. Треба виготовити деталі трьох (i) різновидів: $l_1 = 250$ см, $a_1 = 150$ одиниць; $l_2 = 190$ см, $a_2 = 140$ одиниць, $l_3 = 100$ см, $a_3 = 48$ одиниць. Скласти раціональний план розкрою вихідного матеріалу (деталей) з найменшими відходами (залишками).

Розв’язок задачі

Таблиця 2

Можливі варіанти розкрою

Номер способу (j)	**b_{ij}**			**Залишок C_j**	**Кількість прутків за "j"-м способом**
	l_1 = 250	**l_2 = 190**	**l_3 = 100**		
$j = 1$	3	0	0	50	x_1
$j = 2$	2	1	1	10	x_2
$j = 3$	2	0	3	0	x_3
$j = 4$	1	2	1	70	x_4
$j = 5$	1	1	3	60	x_5
$j = 6$	1	0	5	50	x_6
$j = 7$	0	4	0	40	x_7
$j = 8$	0	3	2	30	x_8
$j = 9$	0	2	4	20	x_9
$j = 10$	0	1	6	10	x_{10}
$j = 11$	0	0	8	0	x_{11}
Потрібна кількість деталей	$a_1 = 150$	$a_2 = 140$	$a_3 = 48$	–	–
	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$		

Побудуємо таблицю можливих варіантів розкрою (табл. 2).

Позначимо:

"X_j" – кількість одиниць (прутків) певного матеріалу, який буде розкроєно за "j"-м варіантом (способом);
a_i – потрібна кількість деталей "i"-го різновиду (l_i – довжини);
C_j – залишок при розкрої одиниці певного матеріалу (прутка) за "j"-м способом (варіантом);
b_{ij} – кількість деталей "i"-го виду, яку отримають при виготовленні з одиниці первинного матеріалу (прутка) за "j"-м варіантом (способом).

Залишок за "j"-м способом від розкрою = $C_j \cdot X_j$,

загалом

$$z = \sum_{j=1}^{n} C_j \cdot X_j \to \min,$$

за умов:

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} \cdot X_j \geq a_i, \ i = 1, 2, 3, ..., m;$$

$$X_j \geq 0, \ j = 1, 2, 3, ..., n.$$

Найбільш трудомістка частина задачі – визначення способів (варіантів) розкрою, – яка здійснюється за формулою:

$$\sum_{i=1}^{m} l_i b_{ij} + C_j = l, \ j = 1, 2, 3, ..., n;$$

$$0 \leq C_j \leq \min(l_i).$$

Цільова функція:

$$z = 50x_1 + 10x_2 + 0x_3 + 70x_4 + 60x_5 + 50x_6 +$$
$$+ 40x_7 + 30x_8 + 20x_9 + 10x_{10} + 0x_{11} \to \min.$$

Обмеження:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 150; \\ x_2 + 2x_4 + x_5 + 4x_7 + 3x_8 + 2x_9 + x_{10} \geq 140; \\ x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + 5x_6 + 2x_8 + 4x_9 + 6x_{10} + 8x_{11} \geq 48; \end{cases}$$

$$X_j \geq 0, \ \ j = 1, 2, 3, ..., 11.$$

Розв’язок задачі складає:

$$Z^* = 2300, X^* = (18; 48; 0; 0; 0; 0; 23; 0; 0; 0; 0).$$

Приклад 4

Задача комплексного розкрою деталей

На розкрій поступають варіанти заготовок (t = 2) у обсязі “b_i” (i = 1, 2, 3, …, m) кожного. Потрібно виготовити комплекти деталей, які налічують “l_k” штук по (l_1 = 1 дет.; l_2 = 2 дет.) деталей кожного виду. Кожна одиниця i-го (одного з двох) видів заготовки може бути розкроєна n_i (j = 1, 2, …, n_i) різними способами. При розкрої одиниці "t"-го матеріалу заготовки "j"-м способом отримаємо "a_{tjk}" одиниць "k"-ї деталі. Потрібно скласти програму виготовлення якомога більшої кількості комплектів деталей, маючи вказані заготовки та задану комплектацію. Нехай заготовки (t = 1) "A" мають довжину 5 м, кількість b_1 = 100 штук; заготовки (t = 2) "B" мають довжину 4 м, кількість b_2 = 175 штук; деталі Д1 мають довжину 2,0 м, деталі Д2 – довжину 1,25 м; до одного комплекту залучають одну (l_1 = 1) деталь Д1 та 2 (l_2 = 2) деталі Д2. Потрібно виготовити якомога більшу кількість комплектів деталей.

Розв'язок задачі

Позначимо за X_{tj} – кількість одиниць "t"-го різновиду заготовок, які розкроюються "j"-м способом, X – загальна кількість комплектів.

Побудуємо таблицю варіантів розкрою заготовок (табл. 3).

Цільова функція: $Z = X \to \max$.

Обмеження:

- по кількості заготовок:

Таблиця 3

Варіанти розкрою заготовок

Варіанти заготовок	**Довжина заготовки, м**	**Спосіб розкрою**	**Розмір деталі**		**Кількість заготовок b_i**	**План розкрою x_{tj}**
			2 м (Д1)	**1,25 м (Д2)**		
t = 1	5 м (A)	j = 1	1	2	b_1 = 100	x_{11}
		j = 2	2	0		x_{12}
		j = 3	0	4		x_{13}
t = 2	4 м (B)	j = 1	2	0	b_2 = 175	x_{21}
		j = 2	1	1		x_{22}
		j = 3	0	3		x_{23}
	Комплектність		l_1 = 1	l_2 = 2		

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 100;$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 175;$$

- по комплектності:

$$x_{11} + 2x_{12} + 0x_{13} + 2x_{21} + x_{22} + 0x_{23} \geq X;$$
$$2x_{11} + 0x_{12} + 4x_{13} + 0x_{21} + x_{22} + 3x_{23} \geq 2X;$$
$$X_{ij} \geq 0; X \geq 0.$$

Оптимальний план складає:

$$Z^* = 264,\ X^* = (0;\ 0;\ 100;\ 132;\ 0;\ 43).$$

Приклад 5

Задача про складання суміші

На підприємстві необхідно виготовити суміш, яка містить 30% речовини $П_1$, 20% речовини $П_2$, 40% речовини $П_3$, 10% речовини $П_4$. Для виготовлення суміші можливо використовувати 3 різновиди сировини $М_1$, $М_2$, $М_3$ з різним співвідношенням речовин та з різною вартістю. Потрібно скласти суміш з мінімальною вартістю та наданим складом речовин. Вхідні дані наведені у табл. 4.

Розв'язок задачі

Позначимо "Xi" – кількість використаної сировини "$М_i$".

Цільова функція: $z = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \min$.

Таблиця 4

Первинні дані про суміш

Речовини	Сировина			Частка речовини у суміші
	$М_1$	$М_2$	$М_3$	
$П_1$	0,3	0,1	0,6	0,3
$П_2$	0,1	0,2	0,2	0,2
$П_3$	0,5	0,6	0,1	0,4
$П_4$	0,1	0,1	0,1	0,1
Вартість за одиницю сировини	4	2	3	
	x_1	x_2	x_3	