Лекція 16. Закон великих чисел. Нерівність Чебишова. Теорема Чебишова

План

1. Закон великих чисел
2. Нерівність Чебишова
3. Теорема Чебишова
4. Теорема Бернуллі
5. Центральна гранична теорема
6. Теорема Муавра-Лапласа

1. Закон великих чисел

Математичні закони теорії ймовірностей одержані внаслідок формалізації реальних статистичних закономірностей, що притаманні масовим випадковим подіям. Під час спостереження масових однорідних випадкових подій у них виявляються певні закономірності типу стабільності. Так, у разі великого числа проведених експериментів відносна частота події $W(A)$ виявляє стабільність і за ймовірністю наближається до ймовірності $P(A)$; середнє арифметичне для випадкової величини наближається за ймовірністю до її математичного сподівання.

Усі ці явища об’єднують під спільною назвою закону великих чисел, який можна загалом сформулювати так: у разі великого числа експериментів, що здійснюються для вивчення певної випадкової події або випадкової величини, середній їх результат практично перестає бути випадковим і може передбачатися з великою надійністю.

Закон великих чисел об’єднує кілька теорем, у кожній з яких за певних умов виявляється факт наближення середніх характеристик під час проведення великої кількості експериментів до певних невипадкових, сталих величин.

Для доведення цих теорем використовується нерівність Чебишова.

2. Нерівність Чебишова

Якщо випадкова величина X має обмежені $M(X)$; $D(X)$, то ймовірність відхилення цієї величини від свого математичного сподівання, взятого за абсолютною величиною ε (ε > 0), не перевищуватиме величини: $1-\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$.

Це можна записати так:

$$P\left(\,|X-M(X)|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2} \qquad (16.1)$$

Приклад 1. Випадкова величина X має закон розподілу $N(-2;4)$. Скориставшись нерівністю Чебишова, оцінити ймовірність $|x-a|<\varepsilon$, якщо $\varepsilon = 4\sigma$.

Розв’язання. Оскільки $a=-2$, $\sigma_x = 4$, $D(X) = 16$, то згідно з (16.1) маємо:

$$P(|x+2|<16)\geq 1-\frac{16}{256}=1-0{,}0625=0{,}9375.$$

3. Теорема Чебишова

Нехай задано n незалежних випадкових величин $X_1, X_2, \dots X_n$, які мають обмежені $M(X_i)$ $(i = 1,\dots, n)$ і дисперсії яких $D(X_i)$ не перевищують деякої сталої C $(C > 0)$, тобто $D(X_i) \le C$. Тоді для будь-якого малого додатного числа ε імовірність відхилення середнього арифметичного цих величин

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{\sum_1^n x_i}{n}$$

від середнього арифметичного їх математичних сподівань

$$M(\overline{X}) = \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n} = \frac{\sum_1^n M(X_i)}{n},$$

взятого за абсолютним значенням на величину ε, прямуватиме до одиниці зі збільшенням числа n:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1$$

або

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n M(X_i)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1 \qquad (16.2)$$

Приклад 2. Дисперсія кожної із 4500 незалежних випадкових величин, що мають один і той самий закон розподілу ймовірностей, дорівнює 5. Оцінити ймовірність того, що відхилення середнього арифметичного цих величин від середнього арифметичного їх математичних сподівань, взяте за абсолютною величиною, не перевищить 0,4.

Розв'язання. Використовуючи нерівність Чебишова для теореми Чебишова, одержимо:

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{4500} X_i}{4500} - \frac{\sum_{i=1}^{4500} M(X_i)}{4500}\right| < 0,4\right) \ge 1 - \frac{5}{4500 \cdot 0,4} = 0,003.$$

4. Теорема Бернуллі

Якщо ймовірність появи випадкової події A в кожному з n незалежних експериментів є величиною сталою і дорівнює p, то при необмеженому збільшенні числа експериментів $n \to \infty$ імовірність відхилення відносної частоти появи випадкової події $W(A)$ від імовірності p, взятої за абсолютною величиною на ε (ε > 0) прямуватиме до одиниці зі зростанням n, що можна записати так:

$$\lim_{n\to\infty} P(|W(A) - p| < \varepsilon) = 1. \qquad (16.3)$$

Приклад 3. Імовірність виготовити стандартну деталь робітником дорівнює 0,95. Контролю підлягає 400 деталей. Оцінити ймовірність відхилення відносної частоти появи стандартної деталі $W(A)$ від імовірності 0,95 не більше ніж на величину 0,02.

Розв'язання. За умовою задачі: $p = 0{,}95$; $q = 0{,}05$; $n = 400$. На підставі (16.3) дістаємо:

$$P(|W(A) - 0{,}95| < 0{,}02) \geq 1 - \frac{0{,}95 \cdot 0{,}05}{400 \cdot (0{,}02)^2} = 1 - 0{,}2969 = 0{,}7031.$$

5. Центральна гранична теорема

Теорема. Нехай задано n незалежних випадкових величин X_1, X_2, … X_n, кожна із яких має один і той самий закон розподілу ймовірностей із $M(X_i) = 0$, $\sigma(X) = \sigma$ і при цьому існує за абсолютною величиною початковий момент третього порядку $|\nu_3|$, тоді зі зростанням числа n закон розподілу $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ наближатиметься до нормального.

Приклад 1. Кожна із 100 незалежних випадкових величин X_i має рівномірний закон розподілу на проміжку [0; 0,12]. Записати наближено закон розподілу для випадкової величини $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Розв'язання. Знаходимо числові характеристики для X_i: $M(X_i) = 0{,}06$; $D(X) = 0{,}1$. Тоді

$$M(Y) = M\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \sum_{i=1}^{100} M(X_i) = 100 \cdot 0{,}06 = 6.$$

$$D(Y) = D\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \sum_{i=1}^{100} D(X_i) = 100 \cdot 0{,}1 = 10.$$

На підставі центральної граничної теореми маємо

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{20\pi}} e^{-\frac{(y-6)^2}{20}}, \quad -\infty < y < \infty.$$

6. Теорема Муавра-Лапласа

У загальному випадку випадкові величини X_1, X_2, … X_n, що розглядаються в центральній граничній теоремі, можуть мати довільні закони розподілу.

Якщо X_i є дискретними і мають лише два значення: $P(X_i = 0) = q$, $P(X_i = 1) = p$, то приходимо до теореми Муавра—Лапласа, яка є найпростішим випадком центральної граничної теореми.

Якщо здійснюється n незалежних експериментів, у кожному з яких імовірність появи випадкової події A є величиною сталою і дорівнює p, то для інтервалу $[\alpha; \beta)$ справедлива рівність:

$$P(\alpha < Y < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{npq}}\right) - \left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}}\right). \tag{17.1}$$

Приклад 2. Завод виготовляє 80% виробів першого сорту. Навмання вибирають 800 виробів. Яка ймовірність того, що число виробів першого сорту виявиться в межах від 600 до 680 штук?

Розв'язання. Із умови задачі маємо $p = 0{,}8$; $q = 0{,}2$; $n = 800$; $\alpha = 700$, $\beta = 620$.

Обчислимо: $np = 800 \cdot 0{,}8 = 640$; $\sqrt{npq} = \sqrt{800 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2} = 11{,}3$.

Згідно з (17.1) дістанемо:

$$P(600 < y < 680) = \Phi\left(\frac{680 - 640}{11{,}3}\right) - \Phi\left(\frac{600 - 640}{11{,}3}\right) = \Phi\left(\frac{40}{11{,}3}\right) - \Phi\left(\frac{-40}{11{,}3}\right) =$$

$$= 2\Phi\left(\frac{40}{11{,}3}\right) = 2\Phi\,(3{,}5) = 2 \cdot 0{,}4499841 = 0{,}999682.$$