Лекція 11. Числові характеристики випадкових величин та їх властивості

План

1. Математичне сподівання
2. Мода та медіана випадкової величини
3. Дисперсія та середнє квадратичне відхилення
4. Початкові та центральні моменти
5. Асиметрія і ексцес

1. Математичне сподівання

Термін «математичне сподівання» випадкової величини X є синонімом терміна «середнє значення» випадкової величини X.

Математичним сподіванням випадкової величини X, визначеної на дискретному просторі Ω, називається величина

$$M(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_i \tag{11.1}$$

Якщо Ω — обмежена множина, то

$$M(X)=\sum_{s=1}^{n}x_i p_i \tag{11.2}$$

Якщо простір Ω є неперервним, то математичним сподіванням неперервної випадкової величини X називається величина

$$M(X)=\int_{\Omega}x\,f(x)dx \tag{11.3}$$

Якщо $\Omega = (-\infty;\infty)$, то

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\,f(x)dx \tag{11.4}$$

Якщо $\Omega = [a; b]$, то

$$M(X)=\int_{a}^{в}x\,f(x)dx. \tag{11.5}$$

Властивості математичного сподівання

1. Математичне сподівання від сталої величини C дорівнює самій сталій:

$$M(C) = C.$$

2. $$M(CX) = CM(X).$$

3. Якщо A і B є сталими величинами, то

$$M(AX+B)=AM(X)+B.$$

2. Мода та медіана випадкової величини

Модою (Mo) дискретної випадкової величини X називають те її можливе значення, якому відповідає найбільша ймовірність появи.

Модою для неперервної випадкової величини X називають те її можливе значення, якому відповідає максимальне значення щільності ймовірності:

f (Mo) = max.

Якщо випадкова величина має одну моду, то такий розподіл імовірностей називають *одномодальним*; якщо розподіл має дві моди — *двомодальним* і т. ін. Існують і такі розподіли, які не мають моди. Їх називають *антимодальними*.

Медіаною (Ме) неперервної випадкової величини X називають те її значення, для якого виконуються рівність імовірностей подій: $F(\text{Me}) = 0{,}5$.

Отже, Ме — можливе значення випадкової величини X, причому таке, що пряма, проведена перпендикулярно до відповідної точки на площині X = Ме, поділяє площу фігури, яка обмежена функцією $f(x)$, на дві рівні частини.

3. Дисперсія та середнє квадратичне відхилення

Математичне сподівання не дає достатньо повної інформації про випадкову величину, оскільки одному й тому самому значенню $M(X)$ може відповідати безліч випадкових величин, які будуть різнитися не лише можливими значеннями, а й характером розподілу і самою природою можливих значень.

Дисперсією випадкової величини X називається математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини $D(X) = M(X - M(X))^2$.

Властивості дисперсії:

1. Якщо C — стала величина, то $D(C) = 0$.

2. $D(CX) = C^2 D(X)$.

3. Якщо A і B — сталі величини, то $D(AX + B) = A^2 D\left(X\right)$.

4. $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$.

Для дискретної випадкової величини X виконується

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - M^2(X) \qquad (11.6)$$

для неперервної $D(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - M^2(X)$.

Отже, дисперсія характеризує розсіювання випадкової величини відносно свого математичного сподівання.

Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини X називають корінь квадратний із дисперсії:

$$\sigma\left(X\right) = \sqrt{D(X)} \qquad (11.7)$$

4. Початкові та центральні моменти

Узагальненими числовими характеристиками випадкових величин є початкові та центральні моменти.

Початковим моментом k-го порядку випадкової величини X називають математичне сподівання величини X^k:

$$\nu_k = M(X^k) \quad (k = 1, 2, 3, ...) \qquad (11.8)$$

Коли $k = 1$, $\nu_1 = M(X)$; коли $k = 2$, $\nu_2 = M(X^2)$ і т. д.

Для дискретної випадкової величини X

$$\nu_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i \tag{11.9}$$

для неперервної

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx \tag{11.10}$$

Якщо $X \in [a; b]$, то

$$\nu_k = \int_{0}^{d} x^k f(x)dx \tag{11.11}$$

Центральним моментом k-го порядку називається математичне сподівання від $(X - M(X))^k$:

$$\mu_k = M(X - M(X))^k \quad (k = 1, 2, 3, ...). \tag{11.12}$$

Коли $k = 1, \quad \mu_1 = M(X - M(X)) = 0;$

коли $k = 2, \ \mu_2 = M(X - M(X)^2 = D(X);$

коли $k = 3, \ \mu_3 = M(X - M(X))^3;$

коли $k = 4, \ \mu_4 = M(X - M(X))^4.$

Для дискретної випадкової величини $\mu_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^k p_i;$ (11.13)

для неперервної $\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^k f(x)dx.$ (11.14)

5. Асиметрія і ексцес

Третій центральний момент характеризує асиметрію закону розподілу випадкової величини. Якщо $\mu_3 = 0$, то випадкова величина X симетрично розподілена відносно $M(X)$. Оскільки μ_3 має розмірність випадкової величини в кубі, то вводять безрозмірну величину — коефіцієнт асиметрії:

$$As = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \tag{11.15}$$

Центральний момент четвертого порядку використовується для визначення ексцесу, що характеризує плосковершинність, або гостровершинність щільності ймовірності $f(x)$. Ексцес обчислюється за формулою

$$Es = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3. \tag{11.16}$$

Зауважимо, що число 3 віднімається ось чому. Для центрального закону розподілу, так званого нормального закону, виконується рівність: $\frac{\mu_4}{\sigma_4} = 3$. Отже, $Es = 0$.