Лекція 4. Елементи комбінаторики в теорії ймовірностей: перестановки, розміщення та комбінації

План

1. Перестановки
2. Розміщення
3. Комбінації

1. Перестановки

Перестановкою із n елементів називають такі впорядковані множини з n елементів, які різняться між собою порядком їх розміщення.

Кількість таких упорядкованих множин обчислюється за формулою

$$\mathrm{P_n} = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (n-1)\, n, \tag{4.1}$$

де n набуває лише цілих невід'ємних значень.

Оскільки $n! = n(n-1)!$, то при n = 1 маємо 1! = 0!

Приклад 1. На кожній із шести однакових карток записано одну з літер Я, І, Р, Е, О, Т.
Яка ймовірність того, що картки, навмання розкладені в рядок, утворять слово

Т	Е	О	Р	І	Я

?

Розв'язання. Кількість усіх елементарних подій (елементів множини Ω) n = 6! = 6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 720.

Кількість елементарних подій, що сприяють появі слова ТЕОРІЯ, m = 1. Позначивши розглядувану подію через B, дістанемо:

$$\mathrm{P(B)} = \frac{m}{n} = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}.$$

2. Розміщення

Розміщенням із n елементів по m $(0 \le m \le n)$ називаються такі впорядковані множини, кожна із яких містить m елементів і які відрізняються між собою порядком розташування цих елементів або хоча б одним елементом.

Кількість таких множин обчислюється за формулою

$$\mathrm{A}_n^m = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-m+1) \tag{4.2}$$

Наприклад, $\mathrm{A}_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$.

Приклад 2. У кімнаті перебувають 10 студентів. Яка ймовірність того, що два і більше студентів не мають спільного дня народження?

Розв'язання. Вважаємо, що рік має 365 днів. Для кожного студента в загальному випадку існує 365, а для 10 студентів — 365^{10} можливих днів народження. Отже, маємо $n = 365^{10}$ елементарних подій множини Ω. Позначимо через B випадкову подію, яка полягає в тому, що дні народження студентів не збігаються. Кількість елементарних подій, що сприяють появі B, $m = \mathrm{A}_{365}^{10}$.

3. Комбінації

Комбінаціями з n елементів по $m\left(0 \le m \le n\right)$ називаються такі множини з m елементів, які різняться між собою хоча б одним елементом.

Кількість таких множин $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_m} = \dfrac{n!}{m!\left(n-m\right)}$. (4.3)

Приклад 3. У цеху працює 10 верстатів-автоматів, кожний із яких може з певною ймовірністю перебувати в роботоздатному стані або в стані поломки. Яка ймовірність того, що під час роботи верстатів-автоматів із ладу вийдуть три з них?

Розв'язання. Оскільки кожний верстат-автомат може перебувати у двох несумісних станах — роботоздатному або неработоздатному, то кількість усіх елементарних подій множини Ω буде $n = 2^{10}$.

Позначимо через A випадкову подію — із ладу вийде три верстати з десяти. Тоді кількість елементарних подій, що сприяють появі A, буде

$$m = C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\,7!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7!}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 7!} = 120.$$

Отже, $\mathrm{P}\left(\mathrm{A}\right) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{C_{10}^3}{2^{10}} = \dfrac{120}{2^{10}}$.