Продовження лекції 6 (7)

КОЛИВАЛЬНА ЛАНКА

Коливальною називається ланка, яка описується рівнянням другого порядку

$$T^2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\xi T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=kx(t), \qquad (1)$$

де ξ (ксі) – коефіцієнт затухання або демпфування $(0<\xi<1)$

Операційне рівняння:

$$Y(s)(T^2s^2+2\xi Ts+1)=kX(s).$$

Передавальна функція ланки:

$$W(s)=\frac{k}{T^2s^2+2\xi Ts+1}.$$

Частотні функції мають вигляд:

$$W(j\omega)=\frac{k}{1-T^2\omega^2+2\xi Tj\omega};\ A(\omega)=\frac{k}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2+(2\xi T\omega)^2}}.$$

При $\omega=1/T$ амплітуда $A(\omega)=k/(2\xi)$, тобто для різних значень коефіцієнта ξ затухання на частоті $\omega=1/T$, яку називають резонансною, амплітуда набуває значе $\xi_1<\xi_2<\xi_3$ /2 до (рис. 8, а:).

$$
\varphi(\omega)=\begin{cases}-\operatorname{arctg}\dfrac{2\xi T\omega}{1-T^2\omega^2}, \text{ при } \omega \le 1/T,\\[2mm] -\pi-\operatorname{arctg}\dfrac{2\xi T\omega}{1-T^2\omega^2}, \text{ при } \omega > 1/T,\end{cases}
$$

тобто при $\omega \to \infty$ $\varphi(\omega) = -\pi.$

Частотні характеристики наведені на рис. 8.

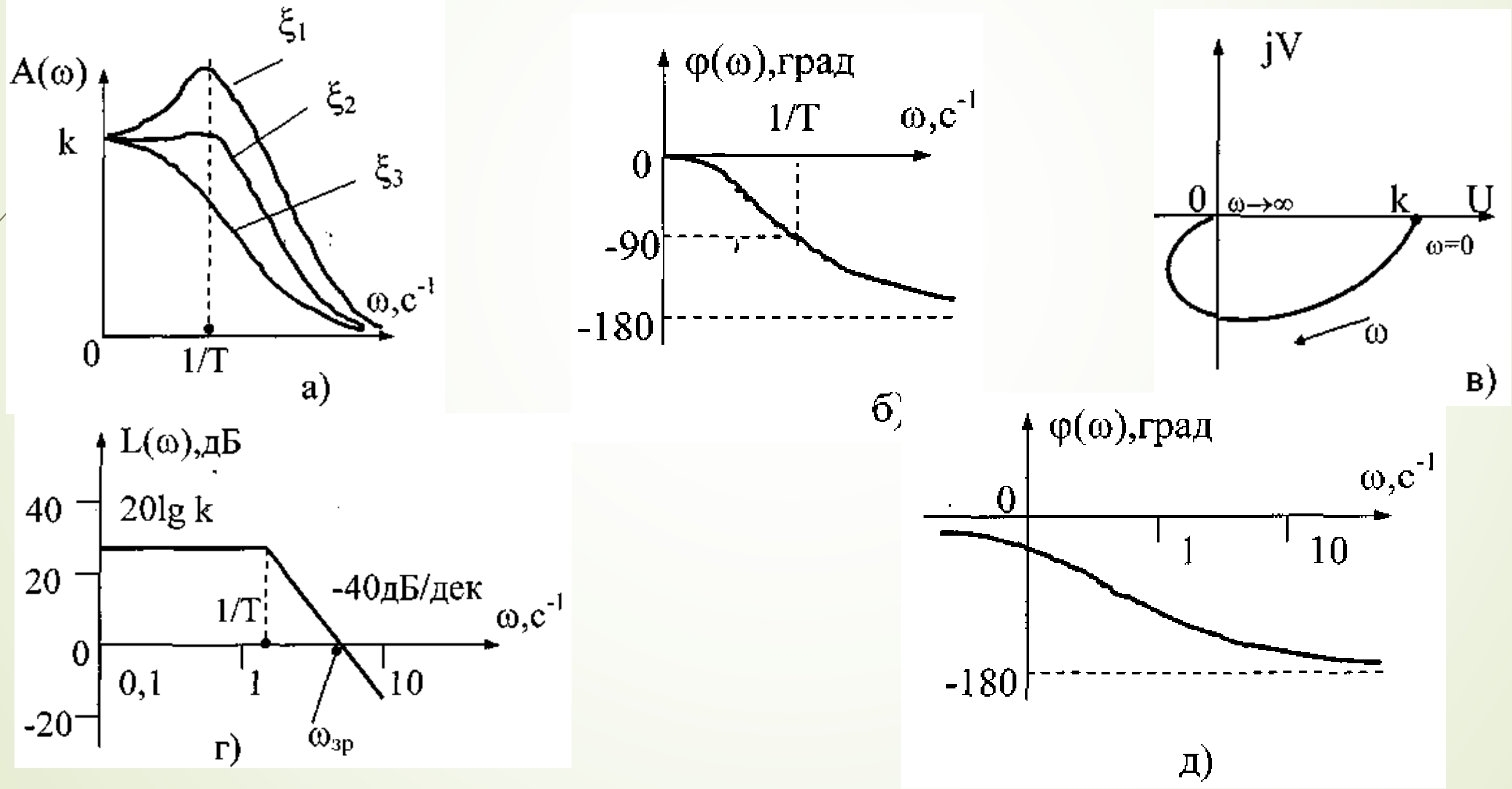


Рис.8. Частотні характеристики коливальної ланки: АЧХ (а); ФЧХ (б); АФЧХ (в);

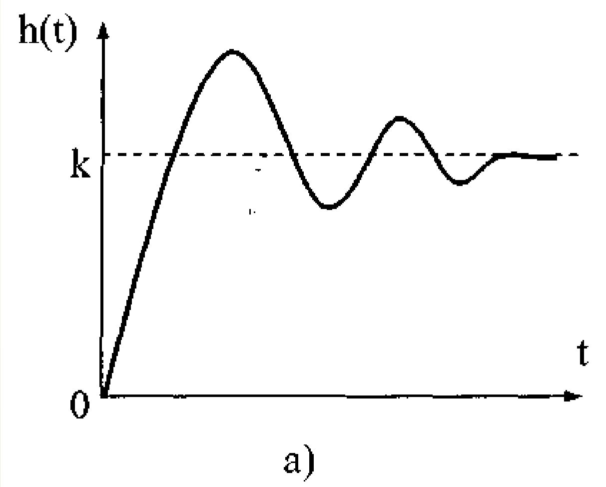
Розв'язуючи рівняння (1) ланки при x(t)=1(t) та за нульових початкових умов (y(0)=0; y'(0)=0), отримаємо перехідну функцію ланки:

$$h(t) = k\left(1 - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi_0)\right),$$

де $\alpha = \xi / T; \beta = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$ $\varphi_0 = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$.

Імпульсна перехідна функція ланки:

$$w(t) = \dot{h}(t) = \frac{k(\alpha^2 + \beta^2)}{\beta} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin \beta t.$$



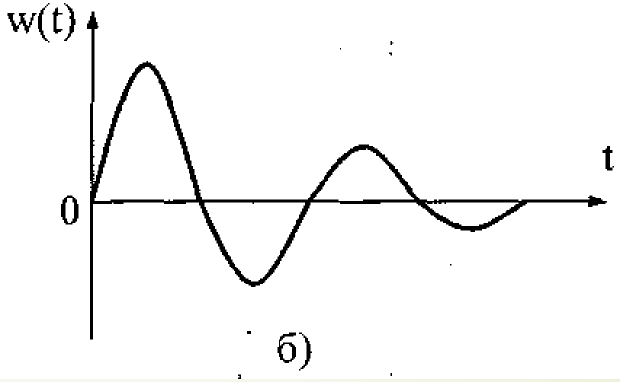


Рис. 9. Перехідна (а) та імпульсна перехідна (б) характеристики коливальної ланки

КОНСЕРВАТИВНА ЛАНКА

Якщо опір каналу обміну енергії дорівнює нулю, тобто $\xi = 0$ (не втрачається енергія), то коливальна ланка вироджується в консервативну (резонансну) ланку, рівняння якої має вигляд:

$$T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + y(t) = k \cdot x(t). \qquad (2)$$

Цьому рівнянню відповідає передавальна функція

$$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 1}.$$

Частотні функції ланки:

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 - T^2\omega^2}; \quad U(\omega) = \frac{k}{1 - T^2\omega^2}; \quad V(\omega) = 0; \quad A(\omega) = \frac{k}{1 - T^2\omega^2}.$$

$\varphi(\omega) = 0$, при $\omega \le 1/T$;

$\varphi(\omega) = -\pi$, при $\omega > 1/T$

Із цих виразів видно, що АЧХ на частоті $\omega = 1/T$ має розрив, а ФЧХ - східчасто змінює своє значення з 0 на $-\pi$ (рис. 10)

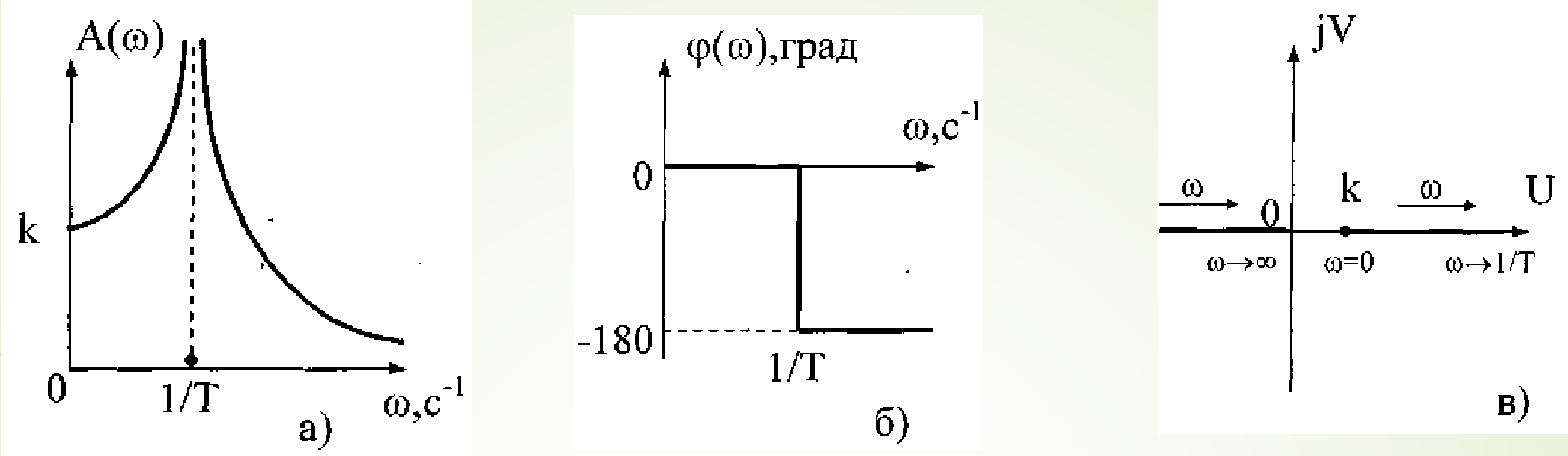


Рис.10. Частотні характеристики консервативної ланки:
АЧХ (а); ФЧХ (б); АФЧХ (в)

Перехідна функція ланк $h(t) = k(1 - \cos\omega_1 t);\ \omega_1 = 1/T.$

Імпульсна перехідна функ $w(t) = \dot{h}(t) = \frac{k}{T}\sin\frac{t}{T}.$

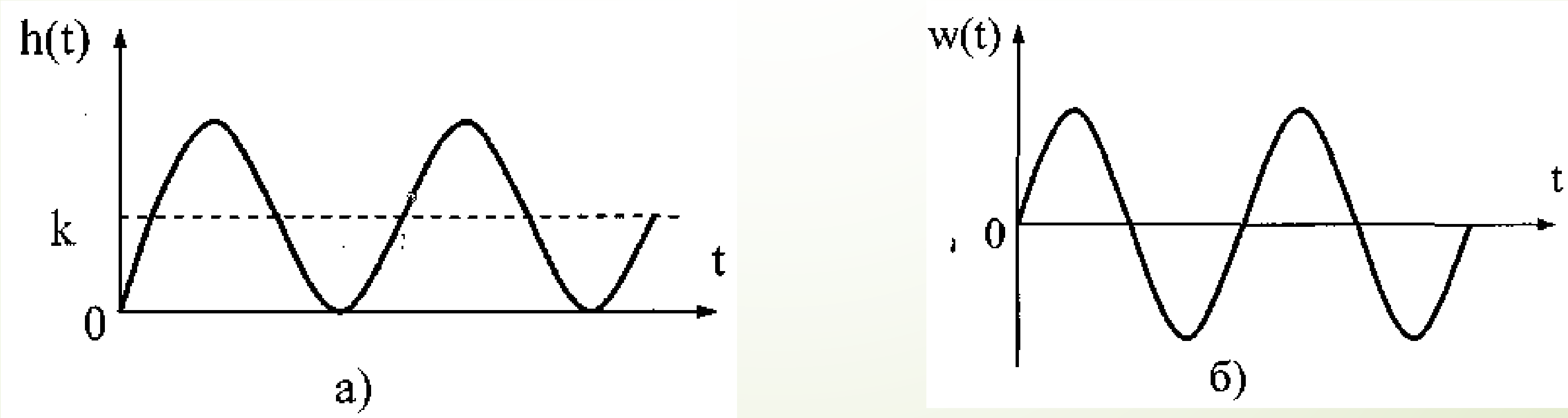


Рис. 11. Перехідна (а) та імпульсна перехідна (б) характеристики консервативної ланки

АПЕРІОДИЧНА ЛАНКА ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Якщо коефіцієнт затухання $\xi \geq 1$, то передавальну функцію коливальної ланки можна привести до вигляду:

$$W(s) = \frac{k}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, \qquad (3)$$

де $T_{1,2} = \dfrac{T}{\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}}$.

Цю ланку можна уявити як послідовне з'єднання двох аперіодичних ланок першого порядку, тому вона не належить до числа елементарних ланок.

ФОРСУЮЧА ЛАНКА

Форсуючою називається ланка, яка описується рівнянням:

$$y(t) = k\left(T\frac{dx(t)}{dt} + x(t)\right). \qquad (4)$$

Операційне рівняння і передавальна функція:

$$Y(s) = k(TsX(s) + X(s)); \quad W(s) = k(Ts + 1).$$

Частотні функції $W(j\omega) = k(Tj\omega + 1);$ $U(\omega) = k;$ $V(\omega) = kT\omega;$ $A(\omega) = k\sqrt{T^2\omega^2 + 1};$

$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}(T\omega);$ при $\omega \to \infty$ $\varphi(\omega) \to \pi/2.$ $L(\omega) = 20\lg k + 20\lg\sqrt{1 + T^2\omega^2};$

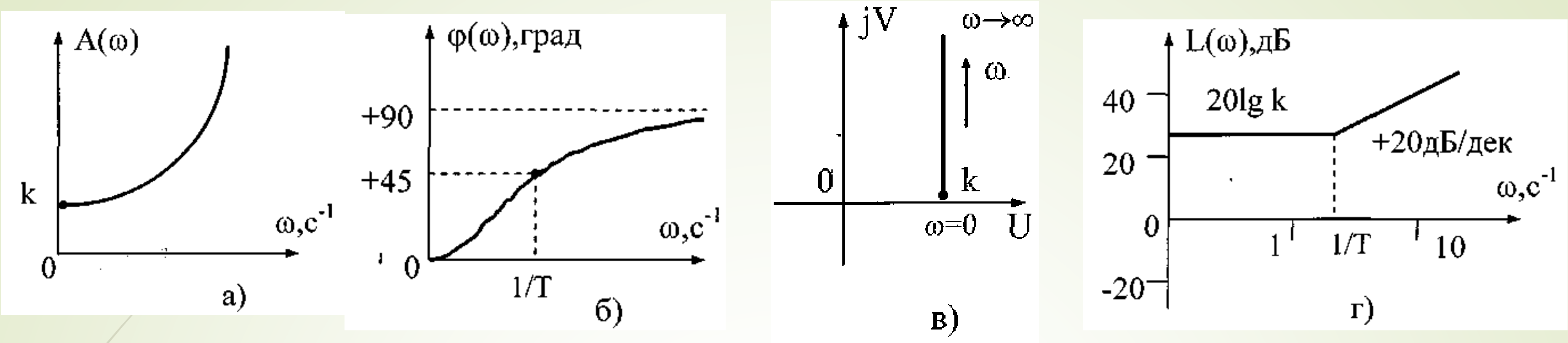


Рис.12. Частотні характеристики форсуючої ланки:
АЧХ (а); ФЧХ (б); АФЧХ (в); ЛАЧХ (г)

Часові функції форсуючої ланки:

$$h(t) = k(T\delta(t) + 1(t)); \qquad w(t) = k(T\dot{\delta}(t) + \delta(t)).$$

ФОРСУЮЧА ЛАНКА ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Ланка описується рівнянням:

$$y(t) = k\left(T^2\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\xi T\frac{dx(t)}{dt} + x(t)\right), \qquad (5)$$

і має передавальну функцію:

$$W(s) = k(T^2s^2 + 2\xi Ts + 1); \; 0 < \xi < 1.$$

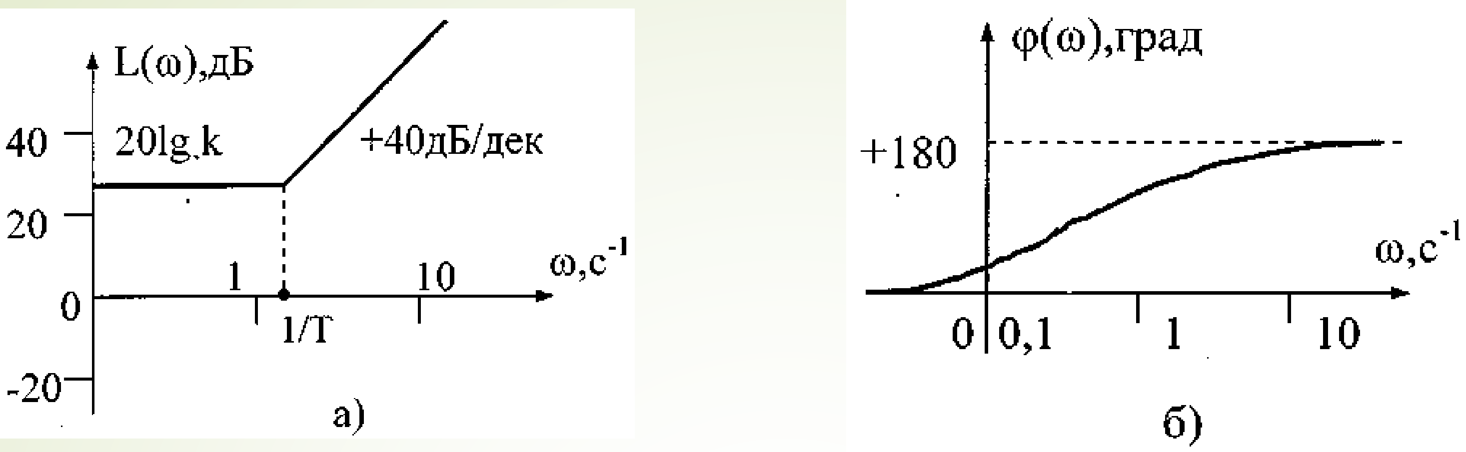


Рис. 13. ЛАЧХ (а) та ЛФЧХ (б)
форсуючої ланки другого порядку

Форсуючі ланки першого та другого порядку не можна реалізувати практично, а реальні форсуючі ланки обов'язково містять аперіодичні або коливальні. Наприклад, ланка, яку називають ланкою швидкого реагування, має передавальну функцію при $T_1 > T_2$.

$$W(s) = k\frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1}.$$

ЛАНКА ЗАПІЗНЕННЯ

Ланка запізнення описується рівнянням

$$y(t) = kx(t - \tau),$$

де k - коефіцієнт передачі. τ - час запізнення.

Передавальна функція ланки:

$$Y(s) = ke^{-\tau s}X(s); \quad W(s) = ke^{-\tau s}.$$

Частотні функції ланки:

$$W(j\omega) = ke^{-\tau j\omega}; \quad A(\omega) = k; \quad \varphi(\omega) = -\tau\omega.$$

Часові функції мають вигляд:

$$h(t) = k \cdot 1(t - \tau); \quad w(t) = k \cdot \delta(t - \tau) = \delta(t - \tau)$$

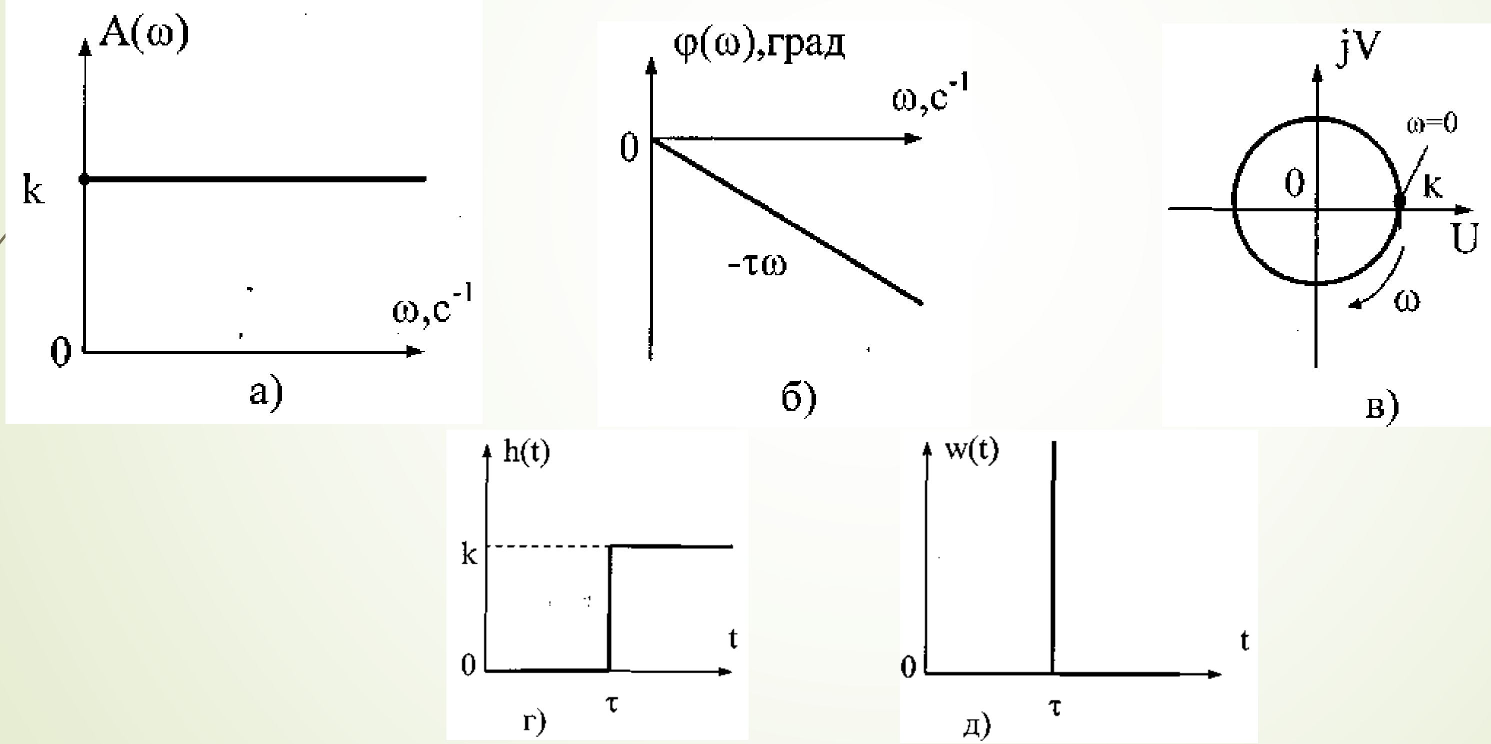


Рис. 14. Характеристики ланки запізнення: АЧХ (а); ФЧХ (б); АФЧХ (в); перехідна (г); імпульсна перехідна (д)