Лекція №5

«МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС САК»

Математичні моделі САК. Рівняння динаміки і статики

Аналіз будь-якої САК можна провести тільки на основі її математичної моделі, яка подає систему з достатнім ступенем точності як у статиці, так і в динаміці. Наявність математичної моделі, взагалі кажучи, визначає наше знання про розглядуване явище. Математична модель складається у вигляді системи рівнянь, звичайно диференційних, що зв'язують вхідні і вихідні величини досліджуваної системи або об'єкта, що управляється.

У більшості випадків безперервні САК описуються нелінійними диференціальними рівняннями n-го порядку, які можуть бути записані у вигляді:

$$F(y, y', y'', ..., x, x', x'', ...) = 0$$

де x - вхідна величини, y - вихідна величина, x', x '', y', y''- похідні за часом від відповідних вхідних і вихідних величин.

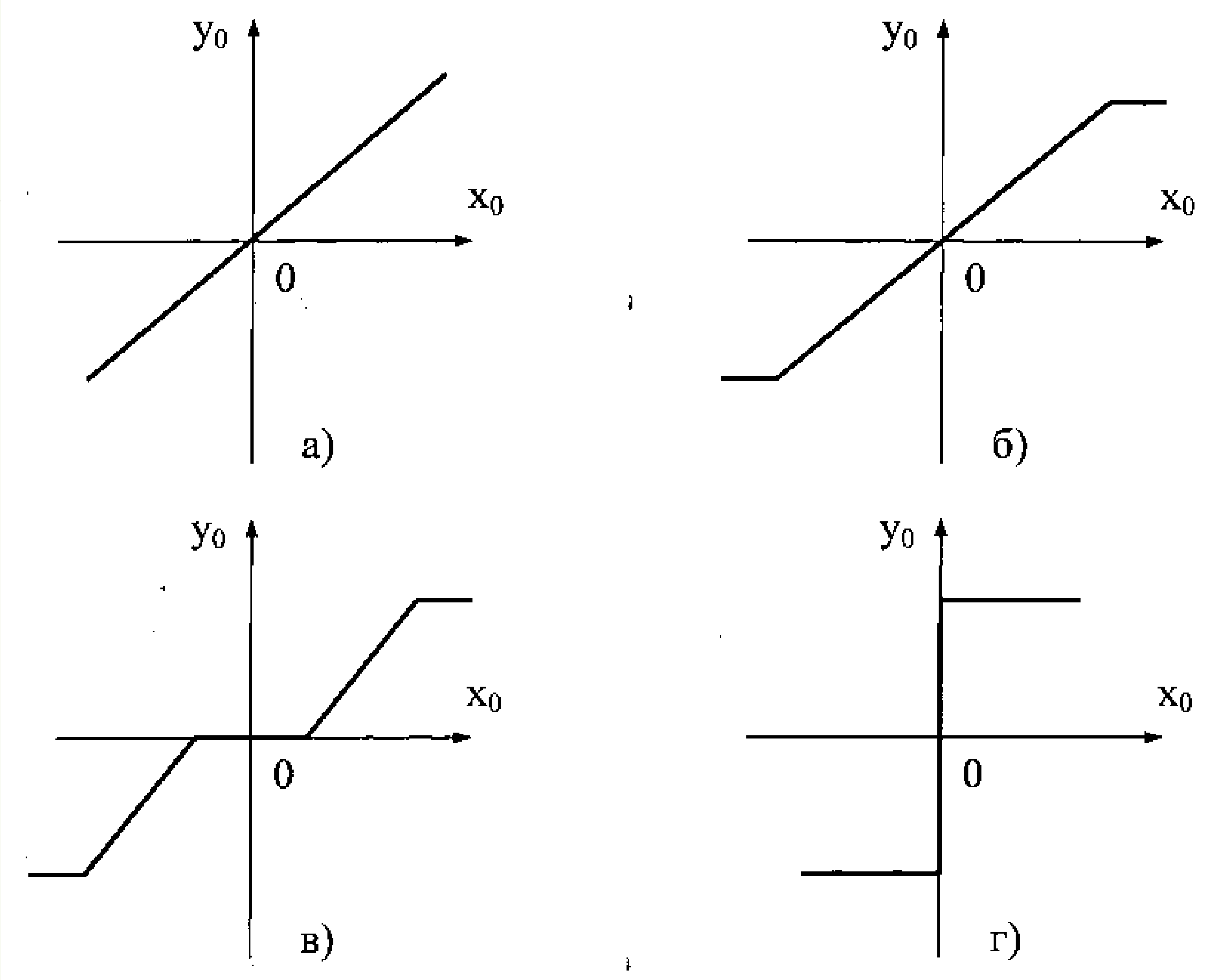
Якщо припустити, що вплив x(t) не змінюється і має постійне значення x_0, а процес у системі устаовився, і вихідна координата набула значення y_0, то рівняння набуде вигляду:

$$F(y_0, 0, 0, ..., x_0, 0, 0, ...) = 0$$

Статичною характеристикою називається залежність вихідної величини від вхідної в усталеному режимі.

Якщо всі рівняння математичної моделі лінійні, то всі основні характеристики досліджуваної САУ можуть бути отримані в аналітичній формі. Однак на практиці математичні моделі багатьох систем і об'єктів нелінійні, як правило, вони не мають аналітичних розв`язків і можуть бути досліджені спеціальними, наприклад, числовими методами. Тому при складанні математичної моделі бажано отримати рівняння системи в лінійному вигляді, а якщо це не вдається, їх **лінеаризують.**

Під **лінеаризацією** розуміють заміну точного нелінійного рівняння близьким лінійним. Основний метод лінеаризації базується на поданні системи у малих відхиленнях від їх значень, що установилися.



а) лінійна; б) обмеження лінійності за виходом (насичення);

в) обмеження лінійності за виходом із зоною нечутливості;

У результаті лінеаризації математична модель САК зводиться до системи лінійних диференціальних рівнянь чи до одного лінійного диференціального рівняння n-го порядку:

$$a_0\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+K+a_{n-1}\frac{dy(t)}{dt}+a_n y(t)=b_0\frac{d^m x(t)}{dt^m}+b_1\frac{d^{m-1}x(t)}{dt^{m-1}}+K+b_{m-1}\frac{dx(t)}{dt}+b_m x(t) \quad (1)$$

де y(t) – вихідна величина елемента або системи; x(t)– вхідна величина елемента або системи; a_j, b_j– коефіцієнти, які залежать від конструктивних параметрі елемента або елементів системи.

Отримане диференційне рівняння (1) так само, як і вихідне, описує рух досліджуваної системи, однак воно є приблизним (бо були відкинуті члени вищого порядку малості) і воно записане не відносно самих змінних, а відносно їх відхилень від значень, що встановилися. Таким чином отримано **лінійне рівняння у відхиленнях або варіаціях змінних.**

З метою скорочення запису, вводять оператор диференціювання

$$p = \frac{d}{dt} \qquad (2)$$

і виносять за дужки вихідну і вхідну величини, диференційне рівняння в операторній формі набуває вигляду:

$$\left(a_0p^n + a_1p^{n-1} + K + a_{n-1}p + a_n\right)y(t) = \left(b_0p^m + b_1p^{m-1} + K + b_{m-1}p + b_m\right)x(t) \qquad (3)$$

Представивши вираз в дужках як многочлен від **p**, диференціальне рівняння можна скорочено записати в наступному вигляді:

$$m(p)y(t) = n(p)x(t) \qquad (4)$$

де

$$m(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + K + a_{n-1} p + a_n \qquad (5)$$

$$n(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + K + b_{m-1} p + b_m \qquad (6)$$

Вираз (5) називається вихідним оператором елемента або системи, а (6) – вхідним оператором.

Передаточна функція

Передаточна функція показує, як система перетворює відповідний вхідний вплив на вихідну величину. Передаточною функцією в операторній формі називається відношення оператора впливу до власного оператора:

$$W(p) = \frac{n(p)}{m(p)}$$

Тоді рівняння системи може бути записано в більш компактній формі:

$$y(t) = W(p) \cdot x(t)$$

Перетворення Лапласа

Перетворенням Лапласа називають співвідношення:

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt.$$

Це співвідношення ставить у відповідність функції x(t) дійсної змінної t функцію X(s) комплексної змінної $s = \sigma + j\omega$

При цьому x(t) називають оригіналом, а X(s) - зображенням за Лапласом. Це записують таким чином: $x(t) \to X(s)$, або $X(s) \to x(t)$.

Символічний запис: $X(s) = L\{x(t)\}$, де L - оператор Лапласа.

Співвідношення

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} X(s)e^{st}ds$$

визначає за відомим зображенням його оригінал і називається оберненим перетворенням Лапласа. Символічно це можна записати так: $x(t) = L^{-1}\{X(s)\}$

де L^{-1} – обернений оператор Лапласа.

Рівняння (3) може бути записано також в операційній формі, якщо до лівої та правої частин застосувати перетворення Лапласа:

$$\left(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0\right) Y(s) = \\ = \left(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0\right) X(s). \qquad (7)$$

Введемо поняття передавальної функції за Лапласом.

Передавальною функцією за Лапласом W(s) називається відношення зображення вихідної величини до зображення вхідної величини за нульових початкових умов.

Із (7) отримуємо:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}. \qquad (8)$$

Тоді рівняння можна записати у вигляді

$$Y(s) = W(s)*X(s). \qquad (9)$$

Знаменник передавальної функції (8) є характеристичним поліномом системи. Якщо його прирівняти до нуля, отримаємо характеристичне рівняння САК, тобто

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0.$$

Передавальна функція системи W(s) та її часові функції h(t) і w(t) пов'язані між собою:
L{h(t)} = W(s)/s - зображення перехідної функції;
L{w(t)} = W(s) - зображення імпульсної перехідної функції.
Звідси, відповідно, можна записати:

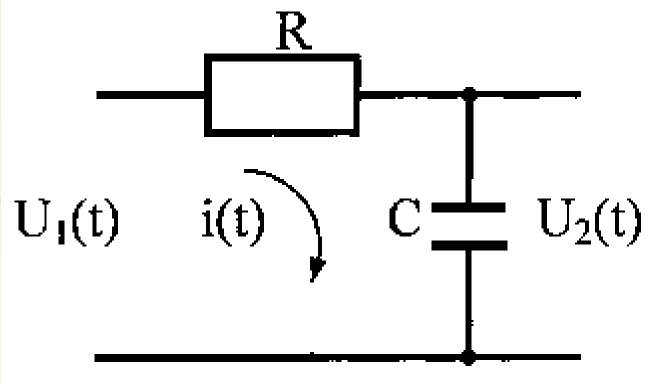
$$w(t) = L^{-1}\{W(s)\},\ h(t) = L^{-1}\{W(s)/s\} \qquad (10)$$

Співвідношення (10) дозволяють знайти перехідну та імпульсну перехідну функції САК за її відомою передавальною функцією W(s). Для цього можуть бути використані таблиці зображень основних елементарних функцій чи теорема розкладу.

Перетворення Лапласа найпростіших функцій

x(t)	X(s)	x(t)	X(s)	x(t)	X(s)
$1(t)$	$1/s$	t^2	$2/s^3$	$\sin(\omega t)$	$\omega/(s^2+\omega^2)$
$\delta(t)$	1	t^n	$n!/s^{n+1}$	$\cos(\omega t)$	$s/(s^2+\omega^2)$
$\delta'(t)$	s	$e^{-\alpha t}$	$1/(s+\alpha)$	$e^{-\alpha t}\cdot\sin(\omega t)$	$\omega/[(s+\alpha)^2+\omega^2]$
t	$1/s^2$	$t\cdot e^{-\alpha t}$	$1/(s+\alpha)^2$	$e^{-\alpha t}\cdot\cos(\omega t)$	$(s+\alpha)/[(s+\alpha)^2+\omega^2]$

Приклад. Скласти диференціальне рівняння чотириполюсника, що зв'язує його вхідну і вихідну напруги, і визначити його передавальну функцію в операторній формі:



$$U_2(t) = U_1(t) - U_R(t);$$

$$U_R(t) = i(t)\cdot R = C\cdot\frac{dU_C(t)}{dt}\cdot R = RC\cdot\frac{dU_2(t)}{dt};$$

$$U_2(t) = U_1(t) - RC\cdot\frac{dU_2(t)}{dt};$$

$$RC\cdot\frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t) = U_1(t).$$

$$T\frac{dU_2(t)}{dt} + U_2(t) = U_1(t)$$

Позначимо RC=T, і отримуємо стандартну форму запису рівняння:

$$TpU_2(t) + U_2(t) = U_1(t) \text{ або } (Tp + 1)U_2(t) = U_1(t).$$

Звідси отримуємо: $n(p) = Tp+1$; $m(p) = 1$.

Передавальна функція чотириполюсника має вигляд: $W(p) = \frac{1}{Tp+1}$

Здатність до управління та спостереження

Поняття здатності до управління пов'язане з можливістю приведення системи в заданий стан за допомогою вхідних сигналів, або впливів, що управляють. Поняття здатності до спостереження пов'язане з можливістю визначення змінних стану за результатами вимірювання (спостереження) вихідних змінних.

Ці поняття виникають при аналізі досить складних систем, як правило з паралельним з`єднанням елементів, коли при застосуванні таких методів представлення математичної моделі системи як диференційне рівняння або передаточна функція ***можна втратити адекватність***.

Систему називають такою, що **повністю управляється**, якщо для будь-яких моментів часу t_0 і t_1, $(t_1 > t_0)$ і будь-яких заданих станів x_0 і x_1 існує управління $u(t)$, $(t_0 < t < t_1)$, що переводить початковий стан x_0 у кінцевий x_1.

Систему називають такою, що **спостерігається**, якщо за даними вимірювань або спостережень векторів y(t) і u(t) на кінцевому інтервалі часу t0 <t < t1 можна однозначно визначити початковий стан $x(t_0)$.

Нарешті, систему називають такою, що **повністю спостерігається**, якщо спостерігаються всі її стани в будь-які моменти часу.