РОЗДІЛ 2. ОСНОВИ ТЕОРІЇ МНОЖИН

Практичне заняття 3. Множини та операції над ними.

Приклади аудиторних завдань

Завдання 1. Пояснити, чому $3 \in \{1, 2, 3, 4\}$, а $\{1, 2\} \notin \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3\}, 1, 2\}$.

Розв'язок.

Множина $\{1, 2, 3, 4\}$ складається із чотирьох елементів, одним із яких є 3, тому приналежність даного елемента множині записується як $3 \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Множина $\{\{1, 2, 3\}, \{2, 3\}, 1, 2\}$ складається із чотирьох елементів: множини $\{1, 2, 3\}$, множини $\{2, 3\}$, об'єкта (елемента множини) 1 і об'єкта (елемента множини) 2. У складі цих елементів не існує множини $\{1, 2\}$, отже, співвідношення записується як $\{1, 2\} \notin \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3\}, 1, 2\}$.

Завдання 2. Нехай задана множина $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}$. Описати цю множину за допомогою характеристичної властивості.

Розв'язок.

Множина A за допомогою характеристичної властивості записується так: $A = \{x \mid 0 < x \le 24 \;\; і \; x \; кратне \; 3\}$.

Завдання 3. Довести, що множини $A = \{2, 5, 4, 2\}$ і $B = \{5, 4, 2\}$ рівні між собою.

Доведення.

Дві множини A і B рівні (тотожні) тоді й тільки тоді, коли кожний елемент A є елементом B і навпаки. Для даних множин ця умова виконується, отже, вони рівні між собою, тобто $A = B$.

Завдання 4. Довести, що порожня множина є підмножиною будь-якої множини.

Доведення.

Припустимо, що існує множина A така, що $\varnothing \not\subset A$. Це означає, що в $\varnothing$ є деякий елемент a, що не міститься в A. Але це неможливо, тому що $\varnothing$ не містить жодного елемента.

Завдання 5. Нехай $A = \{a, b, c, f, g, d\}$, $B = \{b, c, g, k, l\}$. Знайти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \Delta B$.

Розв'язок.

$A \cup B = \{a, b, c, f, g, d, k, l\}$, $A \cap B = \{b, c, g\}$, $A \setminus B = \{a, f, d\}$, $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{a, f, d, k, l\}$.

Завдання 6. Нехай $M_1 = \{x \mid \sin x = 1\}$, $M_2 = \{x = \frac{\pi}{2} \pm 2\pi k, \quad \text{де} \quad k \in N_0\}$. Довести, що $M_1 = M_2$.

Розв'язок.

Крок 1. Покажемо, що $M_1 \subseteq M_2$.

$$\forall x \in M_1 \Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \pm 2\pi k, \quad \text{де}\, k \in N_0 \Rightarrow x \in M_2 \Rightarrow M_1 \subseteq M_2.$$

Крок 2. Покажемо, що $M_2 \subseteq M_1$.

$$\forall x \in M_2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \pm 2\pi k, \quad \text{де}\ k \in N_0 \Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow x \in M_1 \Rightarrow M_2 \subseteq M_1.$$

За результатами виконання кроків 1 і 2 робимо висновок, що $M_1 = M_2$.

Завдання 7. Довести, що $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$, де A і B множини.

Розв'язок.

Крок 1. Покажемо, що $A \subseteq (A \cap B) \cup (A \setminus B)$

$\forall x \in A \Rightarrow (x \in A\ і\ x \in B)\ або\ (x \in A\ і\ x \notin B) \Rightarrow x \in A \cap B\ \ або\ x \in A \setminus B \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \setminus B) \Rightarrow A \subseteq (A \cap B) \cup (A \setminus B).$

Крок 2. Покажемо, що $(A \cap B) \cup (A \setminus B) \subseteq A$

$\forall x \in (A \cap B) \cup (A \setminus B) \Rightarrow x \in A \cap B \quad або \quad x \in A \setminus B \Rightarrow$

$\Rightarrow (x \in A\, і\, x \notin B)\ або\ (x \in A\ і\ x \notin B) \Rightarrow x \in A\ і\ (x \in B\ або\ x \notin B) \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in A\ і\ (x \in B\ або\ x \notin B) \Rightarrow x \in A \Rightarrow (A \cap B) \cup (A \setminus B) \subseteq A$

За результатами виконання кроків 1 і 2 робимо висновок, що $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$.

Завдання 8. Довести справедливість тотожності $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Доведення.

Нехай $x \in A \cup (B \cap C)$, тоді $x \in A$ або $x \in B \cap C$. Якщо $x \in A$, то x належить об'єднанню A з будь-якою множиною, тобто $x \in A \cup B$ і $x \in A \cup C$, отже, x є елементом перетину множин $A \cup B$ і $A \cup C$, тобто $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Якщо $x \in B \cap C$, то $x \in B$ і $x \in C$, отже, $x \in A \cup B$ і $x \in A \cup C$, тобто і у цьому випадку x є елементом перетину тих же множин.

Таким чином, доведено $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Аналогічно доводиться і співвідношення $A \cup (B \cap C) \supset (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Відповідно до визначення рівності множин приходимо до необхідної тотожності $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Завдання 9. Довести справедливість співвідношення $A \cup A = A$.

Доведення.

Співвідношення $A \cup A = A$ доводиться наступними перетвореннями з використанням тотожностей алгебри множин:

$$A \cup A = (A \cup A) \cap U = (A \cup A) \cap (A \cup \overline{A}) = A \cup (A \cap \overline{A}) = A \cup \varnothing = A.$$

Завдання 10. Указати всі підмножини множини $A = \{\{1, 3\}, \{2, 3, 5\}, 4\}$.

Розв'язок.

Кількість підмножин обчислюється за формулою 2^n, де n – кількість елементів множини A, отже, $2^3 = 8$.

Перелічимо підмножини множини A:

$\varnothing, \{\{1{,}3\}\}, \{\{2{,}3{,}5\}\}, \{4\}, \{\{1{,}3\}, \{2{,}3{,}5\}\}, \{\{1, 3\}, 4\}, \{\{2{,}3{,}5\}, 4\}, \{\{1{,}3\}, \{2{,}3{,}5\}, 4\}$

.

Завдання 11. Зобразити результат виконання операції $A \cap B \cap C$, використовуючи діаграми Эйлера-Венна.

Розв'язок.

а) виконаємо операцію $A \cap B$ і зобразимо її результат D на наступній діаграмі (рис. 1).

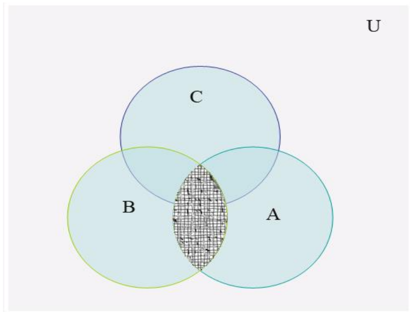


Рисунок 1. – Операція $D = A \cap B$

Множині $D = A \cap B$ буде відповідати зафарбована область діаграми.

б) виконаємо операцію $D \cap C$ і зобразимо її результат E на наступній діаграмі (рис. 2).

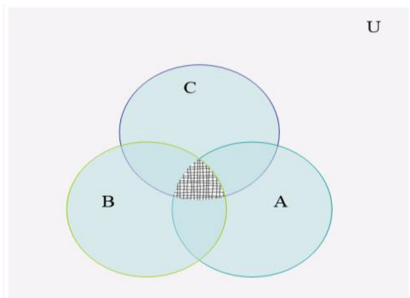


Рисунок 2 – Операція $E = D \cap B$

Множині $E = D \cap B$ буде відповідати зафарбована область на даній діаграмі, що і є результатом виконання операції $A \cap B \cap C$.

Завдання 12. Показати за допомогою діаграм Эйлера-Венна, що $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Розв’язок.

Множина $\overline{(A \cup B)}$ є доповненням множини $(A \cup B)$, яка представлена на рис. 3, тому $\overline{(A \cup B)}$ зобразимо зафарбованою областю, показаною на рис.4.

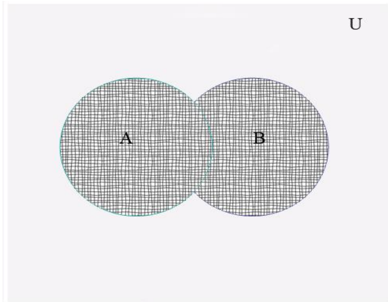


Рисунок 3 – Операція $(A \cup B)$

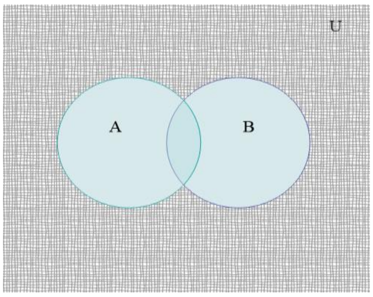
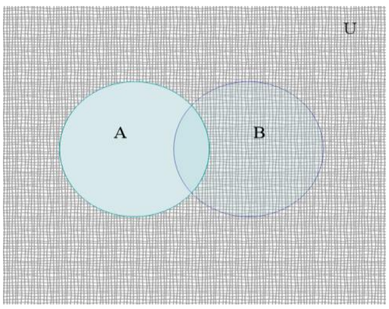
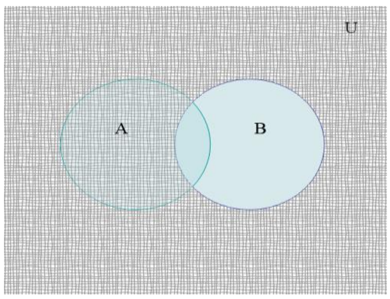


Рисунок 4 – Операція $\overline{(A \cup B)}$

Множині $\overline{A}$ і множині $\overline{B}$ відповідають зафарбовані області діаграм Эйлера-Венна на рис. 5.





а) операція $\overline{A}$ б) операція $\overline{B}$

Рисунок 5 – Операції $\overline{A}$ і $\overline{B}$

Множині $\overline{A} \cap \overline{B}$ відповідають ті частини, які зафарбовані на обох попередніх діаграмах Эйлера-Венна, тому на рис. 6 вона може бути зображена таким чином:

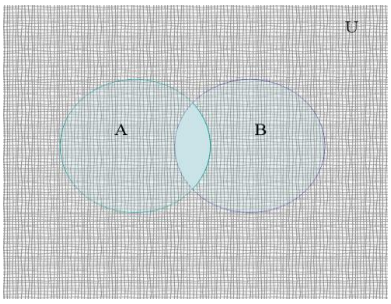


Рисунок 6. – Операція $\overline{A} \cap \overline{B}$

Показали, що і множина $\overline{(A \cup B)}$, і множина $\overline{A} \cap \overline{B}$ однаково зображуються на діаграмі Эйлера-Венна, тому ці множини рівні, тобто $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Вправи для самостійного розв'язання

Завдання 1. Опишіть словами кожне із множин: а) $A = \{x \in N \mid x \ \textit{ділиться на}\ 2\ \ i\ \ x\ \textit{делиться на}\ 3\}$; б) $A = \{x \mid x \in A\ \ i\ \ x \in B\}$; в) $A = \{x \mid x \in A\ \ i\ \ x \notin B\}$.

Завдання 2. Перелічить елементи множини $\{x \mid x - \textit{ціле}\ \ i\ \ x^2 < 100\}$.

Завдання 3. Перелічить елементи множини

$X = \{x \mid x - \textit{голосна буква українського алфавіту}\}$.

Завдання 4. Опишіть множину $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ за допомогою характеристичної властивості.

Завдання 5. Перелічить підмножини множини $\varnothing$.

Завдання 6. Перелічить підмножини множини $\{a, b, c, d\}$.

Завдання 7. Визначите кількість елементів у кожній множині:

а) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$; б) $\{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$; в) $\{\varnothing, \{\varnothing\}, a, b, \{a, b\}, \{a, b, \{a, b\}\}\}$; г); $\{1, 2, 3, \{1, 2, 3\}\}$; д) $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$.

Завдання 8. Нехай множина перших 20 натуральних чисел – це універсум. Запишіть такі її підмножини: A– підмножина парних чисел; B – підмножина непарних чисел; C – підмножина квадратів чисел; D– підмножина простих чисел.

Завдання 9. Чи рівні між собою множини A і B (якщо ні, то чому?):

а) $A = \{2, 5, 4\}$, $B = \{5, 4, 2\}$;

б) $A=\{1,2,4,2\}$, $B=\{1,2,4\}$;

в) $A=\{2,4,5\}$, $B=\{2,4,3\}$;

г) $A=\{1,\{2,5\},6\}$, $B=\{1,\{5,2\},6\}$;

д) $A=\{1,\{2,5\},6\}$, $B=\{1,2,5,6\}$.

Завдання 10. Доведіть, що $A\cup B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)\cup(A\cap B)$, де A і B – множини.

Завдання 11. Нехай $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, $B=\{4,5,6,7,8,9,10\}$, $C=\{2,4,6,8,10\}$, а $U=\{1,2,3,\ldots,10\}$. Визначити множини: 1) $A\cup C$; 2) $A\cap B$; 3) $A\cup(B\cup C)$; 4) $(A\cap B)\cup C$; 5) $\overline{(A\cap B)}$; 6) $\overline{A}\cap\overline{B}$; 7) $A\Delta B$; 8) $A-B$.

Завдання 12. Чи існують такі множини A, B, C, що $A\cap B\neq\varnothing$, $A\cap C=\varnothing$, $(A\cap B)\setminus C=\varnothing$?

Завдання 13. Доведіть наступну рівність $(\overline{A}\cup B)\cap A=A\cap B$.

Завдання 14. Доведіть рівність $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

Завдання 15. Доведіть за допомогою тотожних перетворень співвідношення: $A\setminus(A\setminus B)=B\setminus(B\setminus A)$; $(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)$. Результат перевірте за допомогою діаграм Ейлера-Венна.

Завдання 16. У якому відношенні перебувають множини A і B, якщо $A\setminus B=B\setminus A=\varnothing$?

Завдання 17. Покажіть справедливість тотожностей: а) $\overline{A\cap\overline{B}}\cup B=\overline{A}\cup B$; б) $(A\cap B\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C)=B\cap C$.

Завдання 18. Виходячи з відношення приналежності, доведіть справедливість наступних виразів: а) $A\cup(B\setminus A)=A\cup B$; б) $A\cap(B\setminus A)=\varnothing$; в) $A\setminus(A\cap B)=A\setminus B$; г) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$.

Завдання 19. Використовуючи діаграми Эйлера-Венна, покажіть рівность двох множин $(\overline{A\cup B})=\overline{A}\cap\overline{B}$.

Завдання 20. Для кожної з наведених нижче множин використовуйте діаграму Ейлера-Венна і заштрихуйте ті її частини, які зображують задані множини: 1) $A-B$; 2)$(\overline{A\cap B})$; 3) $(A\cup B)-A\cap B$; 4) $A\cup(B\cap C)$; 5) $(B-C)-A$; 6) $B-(A\cup C)$; 7) $(\overline{A\cap B\cap C})$.

Завдання 21. Знайдіть наступні множини: а) $\varnothing\cap\{\varnothing\}$; б) $\{\varnothing\}\cap\{\varnothing\}$; в) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\setminus\varnothing$; г) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\setminus\{\{\varnothing\}\}$.