

## РОЗДІЛ 5. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ГРАФІВ

### Практичне заняття 8. Основні поняття теорії графів

#### Приклади аудиторних завдань

**Завдання 1.** Визначити степінь кожної вершини графа  $G$ , який зображений на рис 1. Побудувати його доповнення.

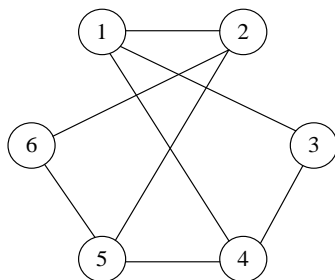


Рисунок 1. – Граф  $G$

**Розв'язок.** Степені вершин визначаються кількістю ребер, які їй інцидентні. Тому:  $\delta(1) = \deg 1 = 3$ ;  $\delta(2) = \deg 2 = 3$ ;  $\delta(3) = \deg 3 = 2$ ;  $\delta(4) = \deg 4 = 3$ ;  $\delta(5) = \deg 5 = 3$ ;  $\delta(6) = \deg 6 = 2$ .

Доповнення графа будується таким чином: з повного графа на 6-ти вершинах  $K_6$  вилучаються ті ребра, які належать графу  $G$ . На рис. 2.а) ребра графа  $G$  відзначені пунктиром.

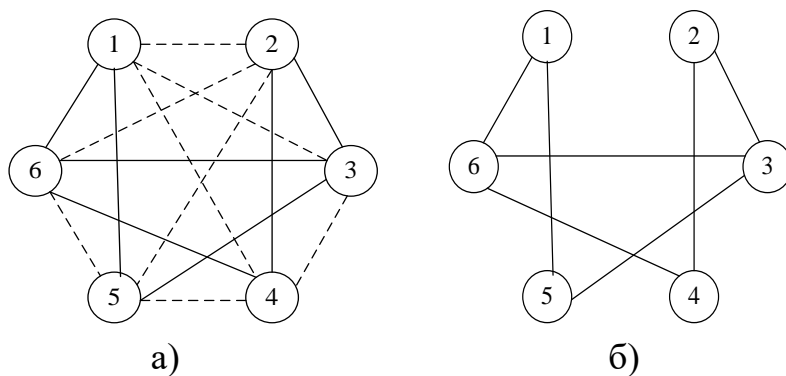


Рисунок 2. – Граф  $K_6$  (а) і доповнення графа  $G$  (б)

Перевірити правильність побудови можна так: сума степенів однойменних вершин графа  $G$  і його доповнення дорівнює 5 (степінь вершин графа  $K_6$ ).

**Завдання 2.** Для орієнтованого графа  $G$ , який зображений на рис. 3., для кожної вершини визначити півстепені «виходу і заходу» (додатний степінь і від'ємний степінь), степінь вершини.

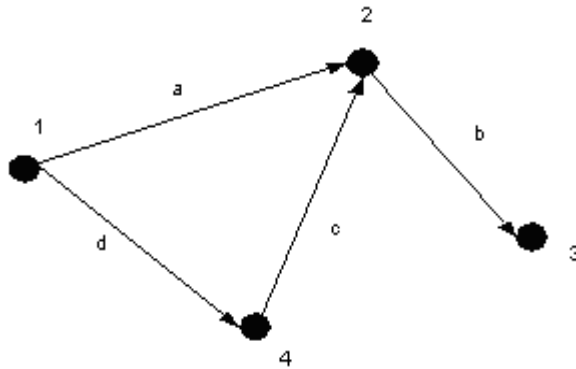


Рисунок 3. – Орієнтований граф  $G$

**Розв'язок.** Додатний степінь вершини  $\delta^+(x)$  – число дуг, що починаються у вершині  $x$ . Від'ємний **степінь** вершини  $\delta^-(x)$  – число дуг, що закінчуються у вершині  $x$ . **Степінь** вершин графа  $G$  дорівнює  $\delta(x) = \delta^+(x) + \delta^-(x)$ .

Для графа  $G$  додатні степені усіх вершин такі:  $\delta^+(1) = 2$ ,  $\delta^+(2) = 1$ ,  $\delta^+(3) = 0$ ,  $\delta^+(4) = 1$ . Від'ємні степені усіх вершин графа  $G$  такі:  $\delta^-(1) = 0$ ,  $\delta^-(2) = 2$ ,  $\delta^-(3) = 1$ ,  $\delta^-(4) = 1$ . Степені вершин графа  $G$ :  $\delta(1) = \delta^+(1) + \delta^-(1) = 2 + 0 = 2$ ,  $\delta(2) = \delta^+(2) + \delta^-(2) = 1 + 2 = 3$ ,  $\delta(3) = \delta^+(3) + \delta^-(3) = 0 + 1 = 1$ ,  $\delta(4) = \delta^+(4) + \delta^-(4) = 1 + 1 = 2$ .

**Завдання 3.** Побудувати матриці суміжності та інциденцій для неорієнтованого графа  $G_1$  й орієнтованого графа  $G_2$  (рис. 4. а) та б) відповідно).

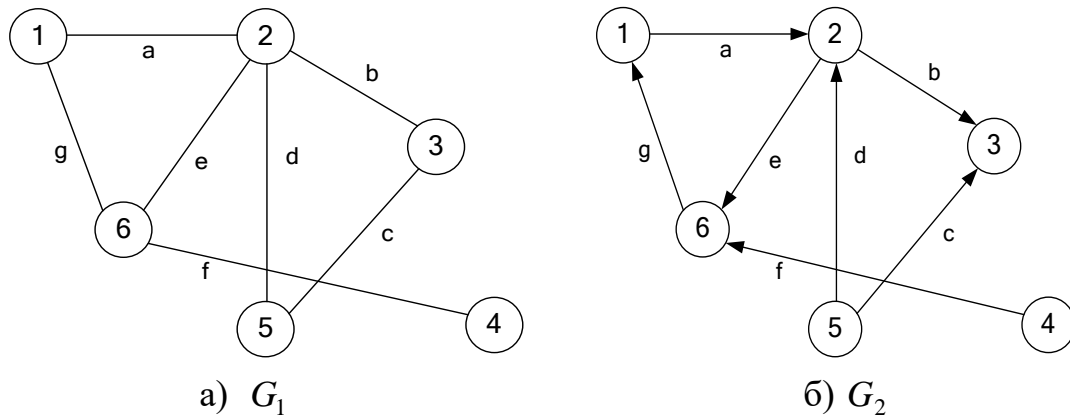


Рисунок 4. – Графи  $G_1$  і  $G_2$

**Розв'язок.** Будуємо матрицю суміжності  $C_1$  графа  $G_1$ , рядки й стовпці якої позначаємо вершинами графа (табл. 1).

Таблиця 1. – Матриця суміжності  $C_1$  неорієнтованого графа  $G_1$

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	0	0	1
2	1	0	1	0	1	1
3	0	1	0	0	1	0
4	0	0	0	0	0	1
5	0	1	1	0	0	0
6	1	1	0	1	0	0

Для неорієнтованого графа  $G_1$  матриця  $C_1$  симетрична. Елемент  $c_{ij}$  матриці суміжності  $C_1$  дорівнює 1, якщо вершини  $i$  й  $j$  суміжні, і 0 у противному випадку. Тому що граф  $G_1$  простий (не має петель і кратних ребер), на головній діагоналі розташовані 0, а всі елементи матриці мають значення 0 або 1. Сума чисел у рядку (і у стовпці) дорівнює степені вершини.

Матриця інциденцій  $B_1$  будується таким чином: рядки її відповідають вершинам, стовпці – ребрам графа  $G_1$  (табл. 2). Елемент  $b_{ij}$  дорівнює 1, якщо вершина інцидентна ребру, і 0 – у противному випадку.

Таблиця 2 – Матриця інциденцій  $B_1$  неорієнтованого графа  $G_1$

	A	b	c	d	e	F	g
1	1	0	0	0	0	0	1
2	1	1	0	1	1	0	0
3	0	1	1	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	1	0
5	0	0	1	1	0	0	0
6	0	0	0	0	1	1	1

У кожному стовпці повинні перебувати тільки 2 одиниці. Сума чисел у рядку дорівнює степені вершини.

Будуємо матрицю суміжності  $C_2$  графа  $G_2$ , рядки й стовпці якої позначасмо вершинами графа (табл. 3).

Таблиця 3 – Матриця суміжності  $C_2$  орієнтованого графа  $G_2$ 

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	1
3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	1
5	0	1	1	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0

Для орієнтованого графа  $G_2$  матриця  $C_2$  несиметрична. Елемент  $c_{ij}$  матриці суміжності  $C_2$  дорівнює 1, якщо з вершини  $i$  у вершину  $j$  веде дуга, і 0 у протилежному випадку. Тому що граф  $G_2$  простий (не має петель і кратних ребер), на головній діагоналі розташовані 0, а всі елементи матриці мають значення 0 або 1. Сума чисел у рядку дорівнює напівстепені виходу вершини, а у стовпці – напівстепені заходу вершини.

Матриця інциденцій  $B_2$  будується таким чином: рядки її відповідають вершинам, стовпці – ребрам графа  $G_2$  (табл. 4). Елемент  $b_{ij}$  дорівнює 1, якщо вершина є початком дуги, (-1) – якщо вершина – кінець дуги, і 0 – якщо вершини й дуга не інцидентні.

Сума чисел у стовпці дорівнює нулю.

Таблиця 4 – Матриця інциденцій  $B_2$  орієнтованого графа  $G_2$ 

	A	b	c	D	e	F	g
1	1	0	0	0	0	0	-1
2	-1	1	0	-1	1	0	0
3	0	-1	-1	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	1	0
5	0	0	1	1	0	0	0
6	0	0	0	0	-1	-1	1

**Завдання 4.** Використовуючи матрицю суміжності (табл. 5), побудувати діаграму графа  $G$  і визначити, чи є він орієнтованим або неорієнтованим.

Таблиця 5 – Матриця суміжності графа  $G$

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	0	0	0
2	0	0	1	0	0	1
3	0	0	0	1	0	0
4	1	0	0	0	1	1
5	0	1	0	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0

**Розв'язок.** Матриця суміжності несиметрична, тому граф орієнтований. Кількість вершин – 6. Будуємо граф: з вершини 1 ведуть дуги у вершини 2 і 3; з вершини 2 – у вершини 3 і 6; з вершини 3 – у вершину 4; з вершини 4 – у вершини 1, 5 і 6; з вершини 5 – у вершину 2; з вершини 6 – у вершину 1.

Перевірити правильність побудови можна, порахувавши напівстепені виходу (сума цифр у рядку) і напівстепені заходу (сума цифр у стовпці) для кожної вершини. Граф, що відповідає матриці суміжності (табл. 5), зображений на рис. 5.

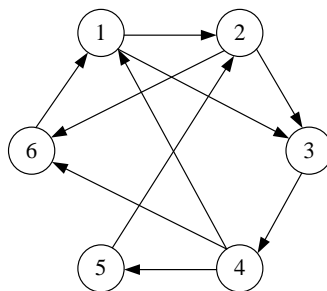


Рисунок 5. – Граф  $G$

**Завдання 5.** Використовуючи матрицю інциденцій (табл. 6), побудувати діаграму графа  $G$  і визначити, чи є він орієнтованим або неорієнтованим.

Таблиця 6. – Матриця інциденцій графа  $G$

	A	b	c	d	e	F	g
1	1	0	0	0	1	0	0
2	0	1	0	1	0	0	0
3	0	0	1	0	0	1	0
4	1	1	0	0	0	1	0
5	0	0	0	1	0	0	1
6	0	0	1	0	1	0	1

**Розв'язок.** У матриці  $G$  немає значень  $(-1)$ , тому можна зробити висновок про те, що граф неорієнтований. Кількість вершин дорівнює 6, кількість ребер – 7. Будуємо порожній граф на шести вершинах і з'єднуємо їх ребрами: ребро  $a$  з'єднує вершини 1 і 4, ребро  $b$  – вершини 2 і 4, і т.д. Граф, що відповідає матриці інциденцій (табл. 6), зображений на рис. 6.

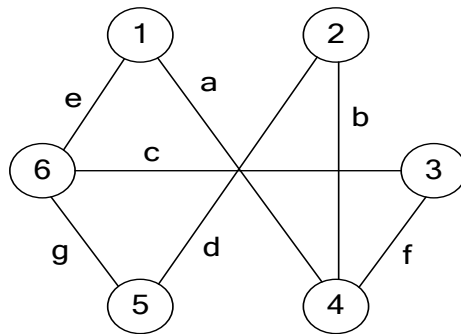


Рисунок 6. – Граф  $G$

**Завдання 6.** Довести ізоморфізм графів  $G_1(X_1, Y_1)$  і  $G_2(X_2, Y_2)$ , де  $X_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ,  $X_2 = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ ,  $Y_1 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 6), (1, 7), (2, 3), (2, 4), (2, 7), (3, 4), (3, 5), (4, 5), (4, 6), (5, 6), (5, 7), (6, 7)\}$ ,  $Y_2 = \{(a, e), (a, b), (a, c), (a, g), (b, c), (b, d), (b, g), (c, d), (c, f), (d, e), (d, f), (e, f), (e, g), (f, g)\}$ .

**Розв'язок.** Нумеруємо вершини графа  $G_1(X_1, Y_1)$  довільно. Після цього нумеруємо вершини графа  $G_2(X_2, Y_2)$ , домагаючись того, щоб вершини з номерами  $i$  та  $j$  у ньому були суміжні тоді й тільки тоді, коли суміжні вершини з такими ж самими номерами в графа  $G_1(X_1, Y_1)$ .

### Вправи для самостійного розв'язання

**Завдання 1.** Побудувати всі графи на п'яти, чотирьох і трьох вершинах.

**Завдання 2.** Побудувати повний граф з чотирма вершинами. Знайти всі його підграфи. Знайти його частини, що містять 5, 4, 3, 2, 1 ребро. Які знайдені частини є підграфами, а які ні?

**Завдання 3.** Побудувати доповнення до графів, які зображені на рис 1, визначити степені вершин графів та їх доповнень.

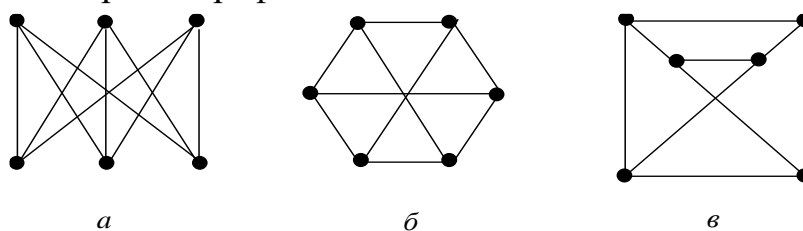


Рисунок 1

**Завдання 4.** Для графів, які зображені на рис. 2, визначити степені вершин. Для орієнтованого графа, який зображений на рис. 2 б), для кожної вершини визначити півстепені «виходу і заходу» (додатний степінь і від’ємний степінь).

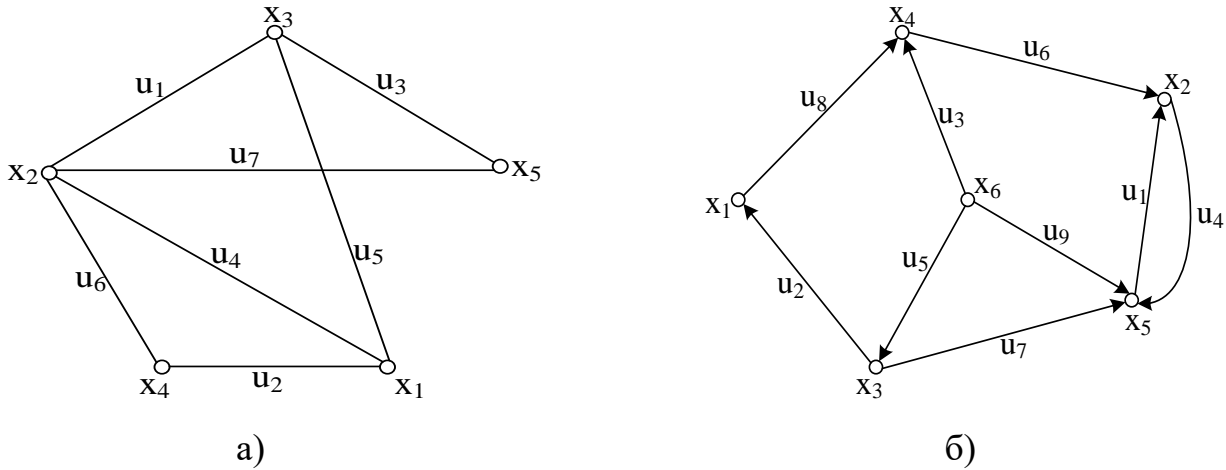


Рисунок 2

**Завдання 5.** Побудувати матриці суміжності та інциденцій графа  $G(X, Y)$ , де  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ,  $Y = \{(1, 2), (1, 6), (1, 5), (2, 3), (2, 7), (3, 4), (3, 8), (4, 5), (4, 9), (5, 10), (6, 7), (6, 10), (7, 9), (8, 9), (8, 10)\}$ .

Побудувати доповнення цих графів та їхніх матриць суміжності та інциденцій.

**Завдання 6.** Для графів, які зображені на рис. 2, скласти матриці суміжності та інциденцій. Використовуючи ці матриці, підрахувати степені вершин графів, півстепені «виходу і заходу» для вершин орієнтованого графа.

**Завдання 7.** Використовуючи матриці суміжності графів  $G_a$  і  $G_b$ , побудувати наочне зображення (діаграми) графів.

$$A(G_a) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} ; \quad A(G_b) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} .$$

**Завдання 8.** Довести ізоморфізм графів, які зображені на рис. 1.

**Завдання 9.** Довести неізоморфність графів  $G_1(X_1, Y_1)$  і  $G_2(X_2, Y_2)$ , де  $X_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $Y_1 = \{(1, 2), (1, 6), (2, 3), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (4, 5), (5, 6)\}$ ,  $X_2 = \{a, b, c, d, e, f\}$ ,  $Y_2 = \{(a, b), (a, f), (b, c), (b, e), (c, d), (c, f), (d, e), (e, f)\}$ .

**Завдання 10.** Яке найменше число вершин треба вилучити, щоб графи, які зображені на рис. 3, стали планарними? Яке найменше число ребер треба вилучити, щоб ці графи стали планарними?

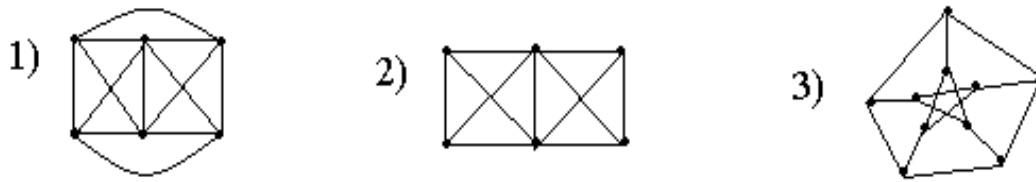


Рисунок 3

**Завдання 11.** Довести, що граф  $G(X, Y)$  непланарний, якщо  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ,  $Y = \{(1, 2), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 7), (3, 4), (3, 8), (4, 5), (4, 10), (5, 9), (6, 8), (6, 9), (7, 9)\}$ .

**Завдання 12.** На рис. 4 наведені графи  $G_1$  і  $G_2$ . Знайти  $G_1 \cup G_2$  і  $G_1 \times G_2$ .

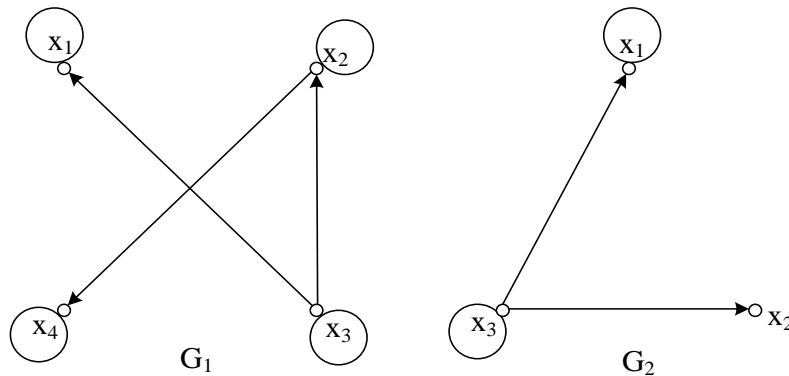


Рисунок 4 – Графи  $G_1$  і  $G_2$ , для яких визначається  $G_1 \cup G_2$  і  $G_1 \times G_2$

**Завдання 13.** На рис. 5 наведені графи  $G_1$  і  $G_2$ . Знайти  $G_1 \cup G_2$  і  $G_1 \cap G_2$ .

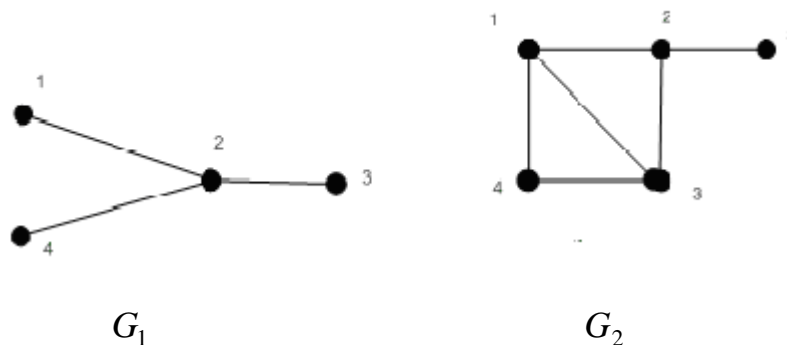


Рисунок 5 – Графи  $G_1$  і  $G_2$ , для яких визначається  $G_1 \cup G_2$  і  $G_1 \cap G_2$



## Практичне заняття 9. Зв'язність. Ейлерові цикли та ланцюги

### Приклади аудиторних завдань

**Завдання 1.** Визначити, чи є для графа  $G$ , який представлений на рис. 4.1, відповідний маршрут ланцюгом, простим ланцюгом, циклом, простим циклом, якщо маршрут заданий як: 1)  $x_1x_4x_2x_1$ ; 2)  $x_1u_2x_4u_9x_5u_8x_4u_5x_2u_4x_1$ ; 3)  $x_2x_4x_1x_5$ ; 4)  $x_3u_3x_1u_2x_4u_2x_1$ ; 5)  $x_4u_9x_5u_1x_1u_3x_3$ .

**Розв'язок.** Відповідно до визначення ланцюга, простого ланцюга, циклу, простого циклу одержимо: 1) простий цикл (всі вершини й ребра різні); 2) цикл (всі ребра різні, а вершини ні); 3) простий ланцюг; 4) маршрут (є однакові ребра й вершини); 5) простий ланцюг.

**Завдання 2.** Визначити число компонент зв'язності в графі  $G$ , якщо граф задається таким чином (рис. 1)

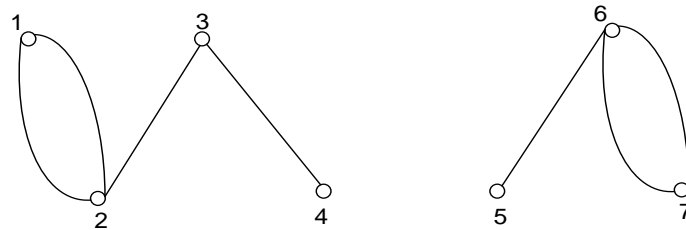


Рисунок 1. – Граф  $G$ , для якого визначається число компонент зв'язності

**Розв'язок.** Граф має дві компоненти зв'язності, в першу входять вершини  $\{1, 2, 3, 4\}$ , в другу –  $\{5, 6, 7\}$ .

**Завдання 3.** Розкласти оргграф  $G$ , який представлений на рис. 2, на сильно зв'язані компоненти.

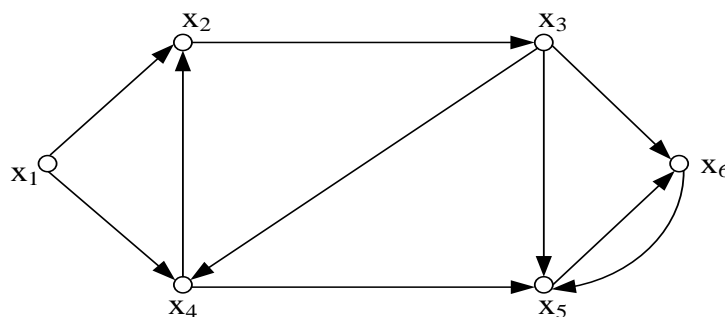


Рисунок 2.

**Розв'язок.** Граф розкладається на три сильно зв'язані компоненти  $G_1, G_2, G_3$  (рис. 3.)

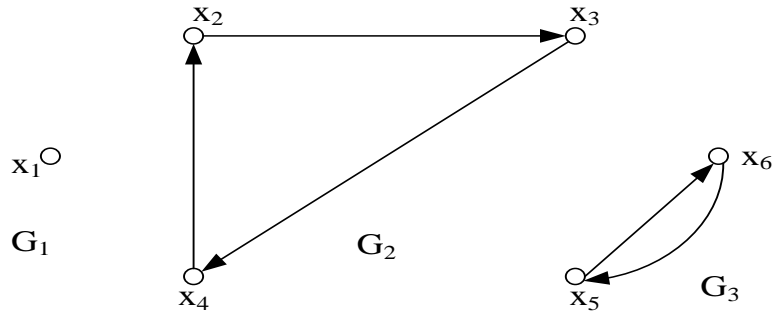


Рисунок 3.

**Завдання 4.**

Знайти в графі  $G$ , який надається на рис. 4, всі точки зчленування і мости.

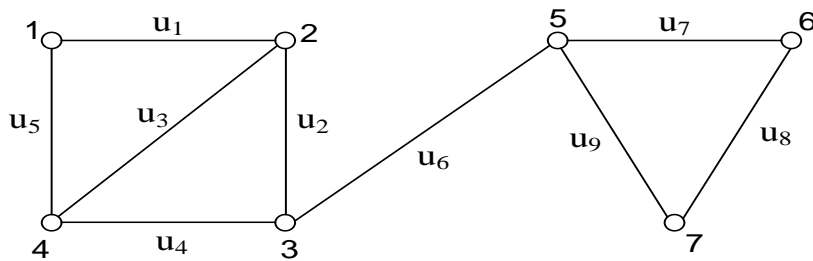


Рисунок 4.

**Розв'язок.**

Послідовно розглянемо ребра графа, вилучаючи їх з графа. Тільки вилучення ребра  $u_6$  приводить до збільшення числа компонент зв'язності, тому  $u_6$  є мостом. Аналогічно розглядаємо вершини графа і находимо, що вершини 3 і 5 є точками зчленування, тому що вилучення їх з графа приводить до збільшення числа компонент зв'язності.

**Завдання 5.**

Знайти такі метричні характеристики графа  $G$  (рис. 5.): ексцентриситети усіх вершин графа, діаметр графа, радіус графа, периферійні вершини графа, діаметральні ланцюги, центральні вершини графа, центр графа.

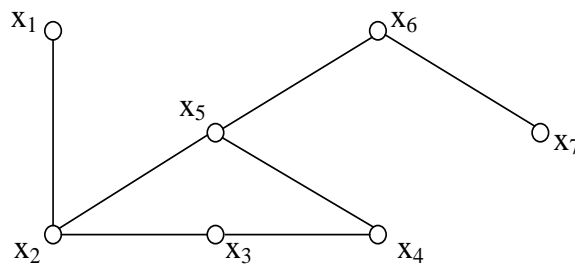


Рисунок 5.

### Розв'язок.

Ексцентриситетом  $e(x_i)$  вершини  $x_i$  є відстань від  $x_i$  до найбільш віддаленої від неї вершини, тому  $e(x_1) = e(x_2) = e(x_4) = e(x_6) = 3$ ,  $e(x_3) = e(x_7) = 4$ ,  $e(x_5) = 2$ . Максимальний з усіх ексцентриситетів є діаметром графа, тобто  $d(G) = \max e(x_i) = 4$ . Найменший з ексцентриситетів є радіусом графа, тобто  $r(G) = \min e(x_i) = 2$ . Вершина  $x_i$  є периферійною, якщо її ексцентриситет дорівнює діаметру графа, тобто  $e(x_i) = d(G)$ , тому периферійними вершинами графа  $G$  є вершини  $x_3$  і  $x_7$ . Простий ланцюг, відстань між кінцями якого дорівнює  $d(G)$ , називається діаметральним ланцюгом, тому діаметральними ланцюгами графа  $G$  є такі ланцюги:  $x_3 - x_2 - x_5 - x_6 - x_7$  і  $x_3 - x_4 - x_5 - x_6 - x_7$ . Вершина  $x_i$  називається центральною вершиною графа, якщо на ній досягається мінімум ексцентриситетів, тобто  $e(x_i) = r(G)$ , тому центральною вершиною графа  $G$  є вершина  $x_5$ . Множина усіх центральних вершин графа є центром графа, тому центром графа  $G$  є  $\{x_5\}$ .

### Завдання 6.

Визначити, чи є граф  $G$ , який зображений на рис. 6, ейлеревим.

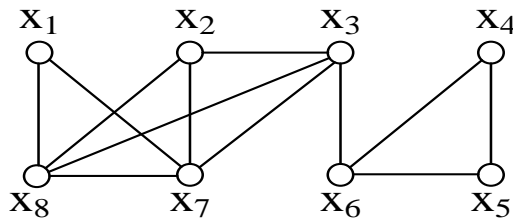


Рисунок 6.

### Розв'язок.

Використаємо теорему Ейлера: граф є ейлеревим (містить ейлерів цикл) тоді і тільки тоді, коли він зв'язний і степені всіх його вершин – парні.

Граф  $G$  є зв'язним. Степені його вершин такі:  $\delta(x_1) = \delta(x_4) = \delta(x_5) = 2$ ,  $\delta(x_2) = \delta(x_6) = 3$ ,  $\delta(x_3) = \delta(x_7) = \delta(x_8) = 4$ . Граф не є ейлеревим, тому що не усі степені вершин є парними.

### Завдання 7.

Чи має граф, який зображений на рис. 7 власний ейлерів шлях?

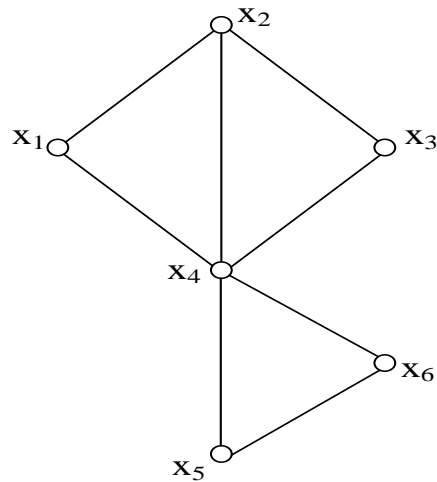


Рисунок 7.

**Розв'язок.**

Використаємо наступну теорему: граф (мультиграф або псевдограф) має власний ейлерів шлях тоді й тільки тоді, коли він зв'язний і рівно дві його вершини мають непарний степінь. Граф, зображений на рис. 4.18, зв'язний, має власний ейлерів шлях, тому що рівно дві його вершини ( $x_2$  і  $x_4$ ) мають непарну степінь, тобто  $\delta(x_2) = \delta(x_4) = 3$ .

**Завдання 8.**

Чи має орієнтований граф, який зображений на рис. 8, ейлерів цикл?

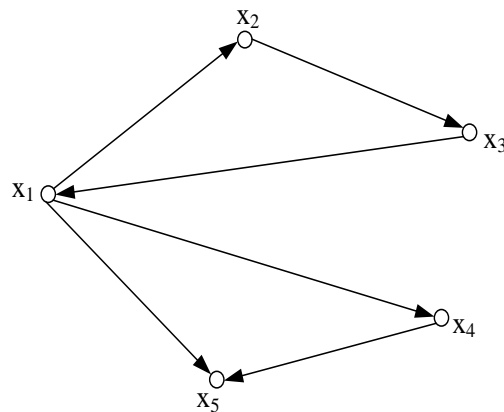


Рисунок 8.

**Розв'язок.**

Використаємо наступну теорему: орієнтований граф має ейлерів цикл тоді й тільки тоді, коли він зв'язний, і півстепені виходу та заходу у вершині  $x_i$  рівні. Орієнтований граф, який зображений на рис. 8, не містить ейлерів цикл, тому що півстепені виходу та заходу у вершинах  $x_1$  і  $x_5$  не дорівнюють відповідно один одному.

### Завдання 9.

Найдіть гамільтонів цикл, якщо він існує, у графі  $G$ , який зображений на рис. 9.

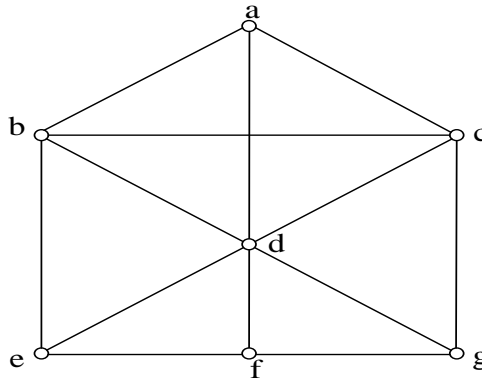


Рисунок 9.

### Розв'язок.

Гамільтонів цикл для графа  $G$  буде таким  $acgfedba$ .

### Вправи для самостійного розв'язання

**Завдання 1.** Визначити, чи є для графа  $G(X, U)$ , який надається на рис. 1, маршрут ланцюгом, циклом, простим циклом, якщо маршрут задається як: 1)  $x_1x_4x_2$ ; 2)  $x_4u_9x_5u_8x_4u_5x_2u_4x_1$ ; 3)  $x_2u_6x_3u_7x_2$ ; 4)  $x_1u_2x_4u_9x_5u_9x_4$ .

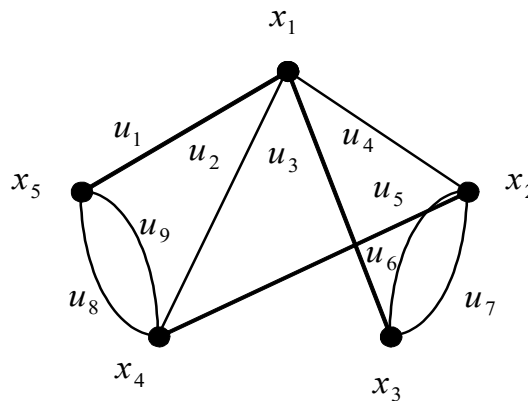


Рисунок 1. – Граф  $G(X, U)$

**Завдання 2.** Який з наведених на рис. 2 орієнтованих графів є зв'язним? Який з графів є сильно зв'язним?

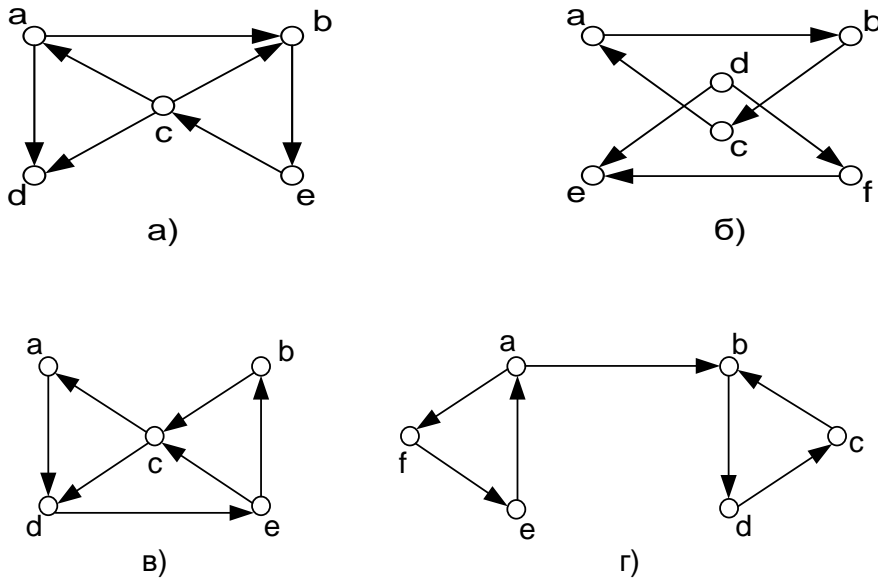


Рисунок 2

**Завдання 3.** Визначити число компонент зв'язності в графах  $G_1$  та  $G_2$  (рис. 3), якщо ці графи задаються таким чином

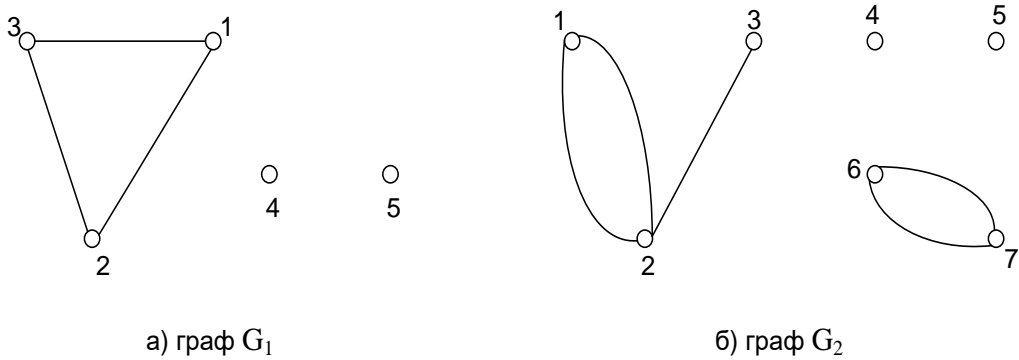


Рисунок 3

**Завдання 4.** Визначити компоненти зв'язності в графі  $G$  (рис. 4) і знайти маршрути довжини три (три дуги), які виходять з вершини  $x_1$ .

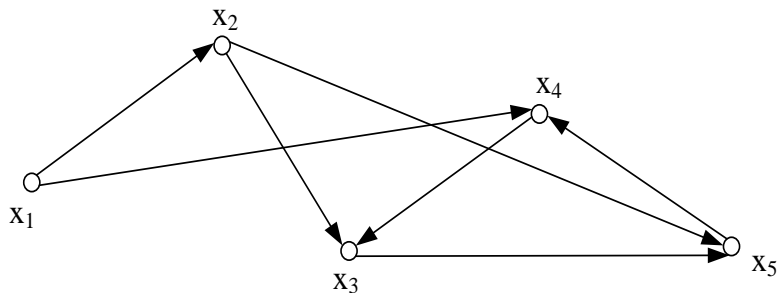


Рисунок 4

**Завдання 5.** Знайти в графі  $G$  (рис. 5) всі точки зчленування і мости.

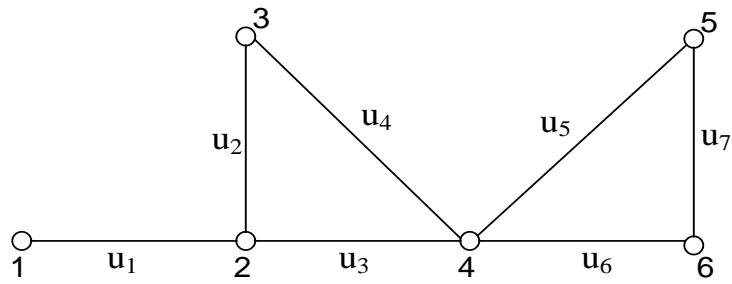


Рисунок 5

**Завдання 6.** Знайти такі метричні характеристики графа  $G$  (рис. 6): ексцентриситети усіх вершин графа, діаметр графа, радіус графа, периферійні вершини графа, діаметральні ланцюги, центральні вершини графа, центр графа.

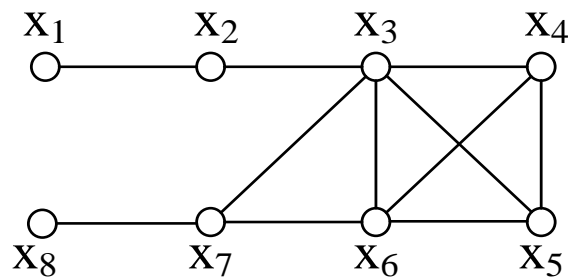


Рисунок 6

**Завдання 7.** Знайти для графа  $G$ , який зображений на рис. 7, центр, радіус, діаметр, периферійні точки.

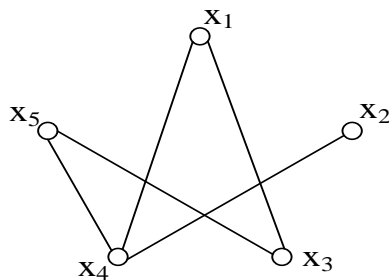
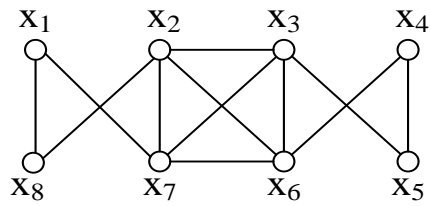
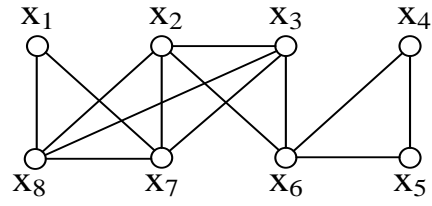


Рисунок 7

**Завдання 8.** Визначити, чи є графи  $G_1$  і  $G_2$ , які зображені на рис. 8, ейлеревими (мають ейлерів цикл).



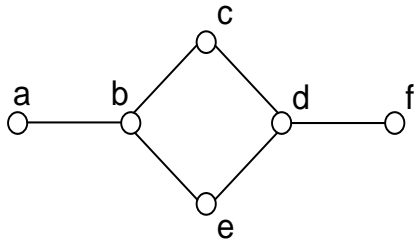
а)



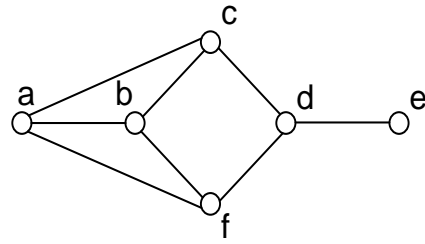
б)

Рисунок 8

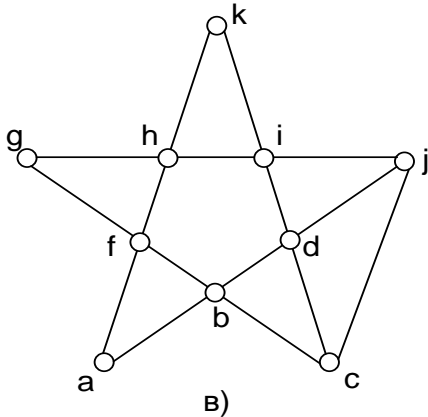
**Завдання 9.** Серед графів, які зображені на рис. 9, знайдіть ті, які мають власний ейлерів шлях?



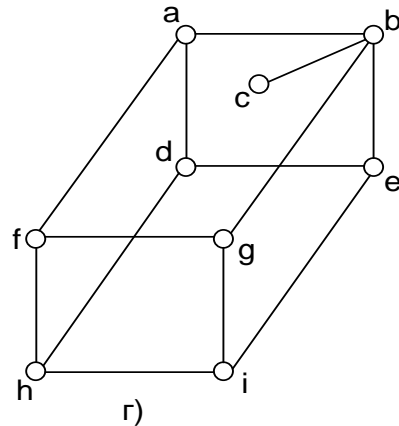
а)



б)



в)

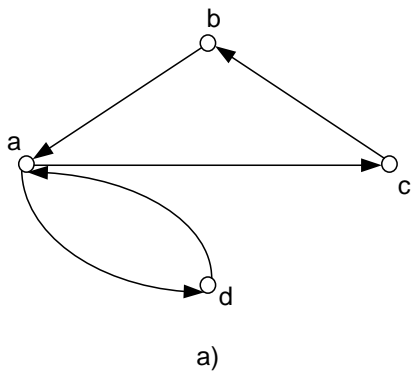


г)

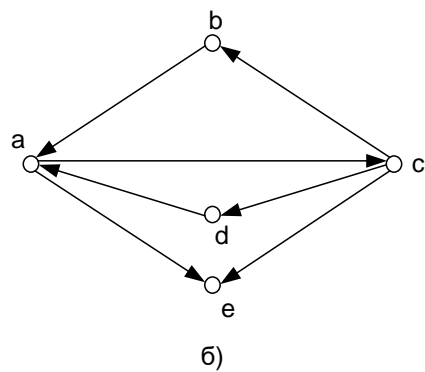
Рисунок 9

**Завдання 10.**

Поясніть, які з орієнтованих графів, що зображені на рис. 10, мають ейлерів цикл?



а)



б)

Рисунок 10



### Завдання 11.

Найдіть гамільтонів цикл, якщо він існує, для кожного з графів, які зображені на рис. 11.

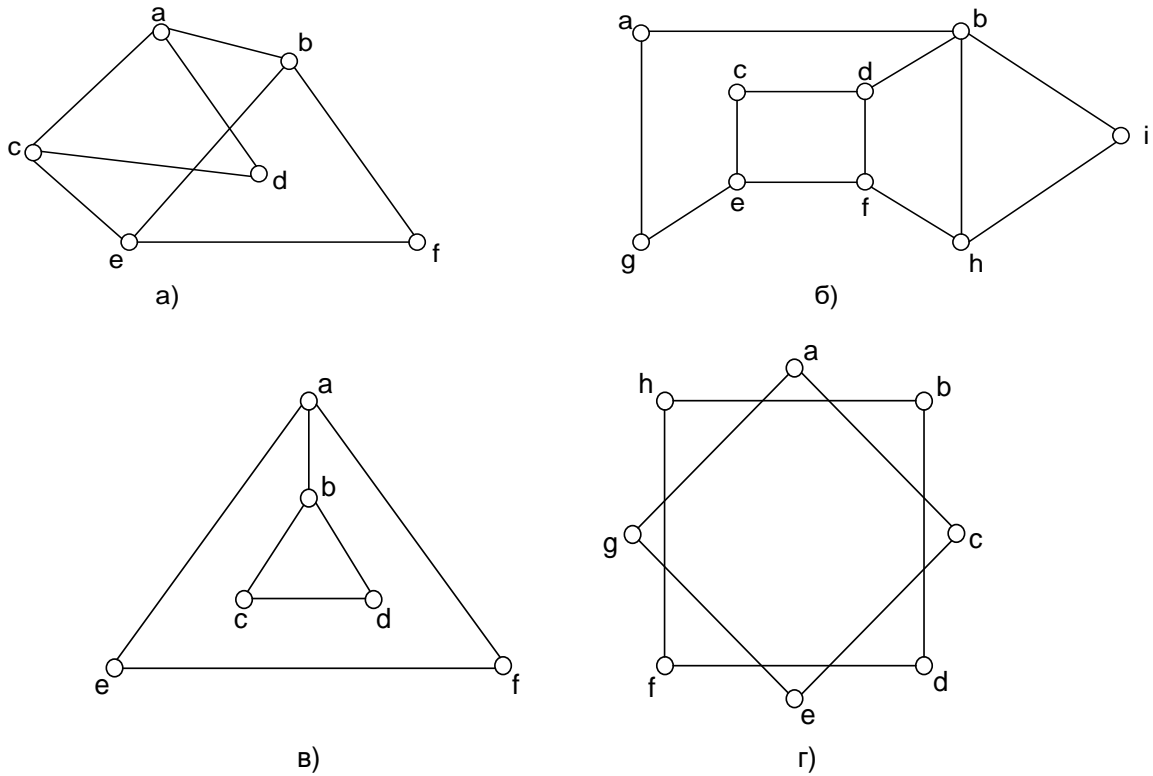


Рисунок 11

### Завдання 12.

Нарисуйте наступні графи: а)  $K_6$ ; б)  $K_{1,3}$ ; в)  $K_{1,4}$ ; г)  $K_{3,4}$ .

## Практичне заняття 10. Пошук оптимальних маршрутів у графі. Дерева. Ліс

### Приклади аудиторних завдань

**Завдання 1.** Чому дорівнює кількість позначених неорієнтованих простих графів з  $n = 3$  вершинами і  $m = 2$  ребрами? Нарисувати усі ці графи.

**Розв'язок.** Кількість  $G_{n;m} = G_{3;2}$  позначених неорієнтованих простих графів з  $n = 3$  вершинами і  $m = 2$  ребрами дорівнює числу сполучень з множини різних неорієнтованих пар вершин  $\{\overline{(x_i, x_j)}\}$  за числом ребер  $m = 2$ .

Оскільки число вказаних пар вершин дорівнює числу сполучень  $C_n^2$ , то

$$G_{n;m} = C_{C_n^2}^m = C_{C_3^2}^2, \text{ де } C_n^2 = C_3^2 = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{3(3-1)}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3.$$

Тому  $G_{n;m} = G_{3;2} = C_{C_3^2}^m = C_3^2 = 3$ . Ці три графа представлено на рис. 1.

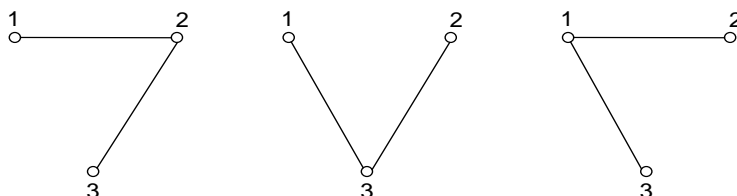


Рисунок 1. – Позначені неорієнтовані прості графи з  $n = 3$  вершинами і  $m = 2$  ребрами

**Завдання 2.** Чому дорівнює кількість усіх позначених неорієнтованих простих графів з  $n = 3$  вершинами? Нарисувати усі ці графи.

**Розв'язок.** Кількість  $G_{n;m}$  позначених неорієнтованих простих графів з  $n$  вершинами і  $m$  ребрами дорівнює  $G_{n;m} = C_{C_n^2}^m = C_s^m$ , де  $s = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ .

Сумуючи числа  $G_{n;m}$  за всіма можливими кількостями ребер  $m = 1, 2, \dots, \frac{n(n-1)}{2}$  від випадку безреберного графа до випадку повного графа з  $n$  вершинами, одержуємо число  $G_n$  всіх позначених графів з  $n$  вершинами

$$G_n = \sum_{m=0}^s C_s^m = 2^s. \text{ Якщо } n = 3, \text{ то } s = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{3(3-1)}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3 \text{ і}$$

$G_3 = 2^s = 2^3 = 8$ . Усі позначені неорієнтовані прості графи з  $n = 3$  вершинами наведено на рис. 2.

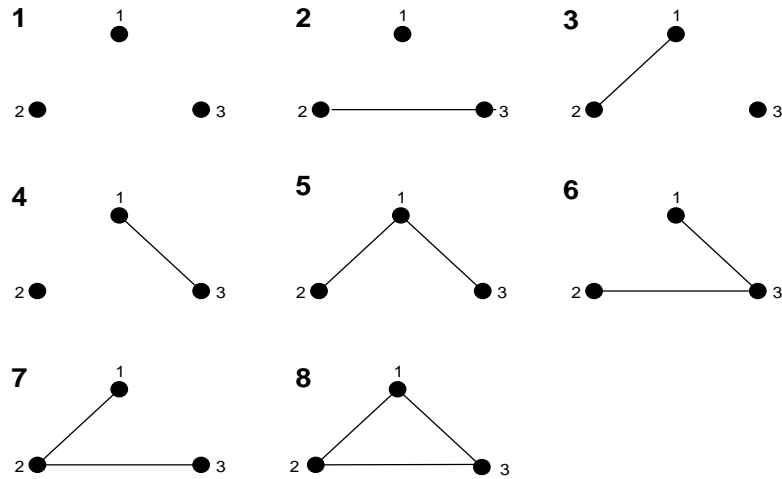


Рисунок 2. – Позначені неорієнтовані прості графи з  $n = 3$  вершинами

**Завдання 3.** Знайти на рис. 2, де представлені неорієнтовані прості графи з  $n = 3$  вершинами, попарно неізоморфні графи без позначок, нарисувати їх, підрахувати кількість  $g_3$  таких графів.

**Розв’язок.** Число попарно неізоморфних графів без позначок з  $n = 3$  вершинами дорівнює  $g_3 = 4$ . Ці графи наведено на рис. 3.

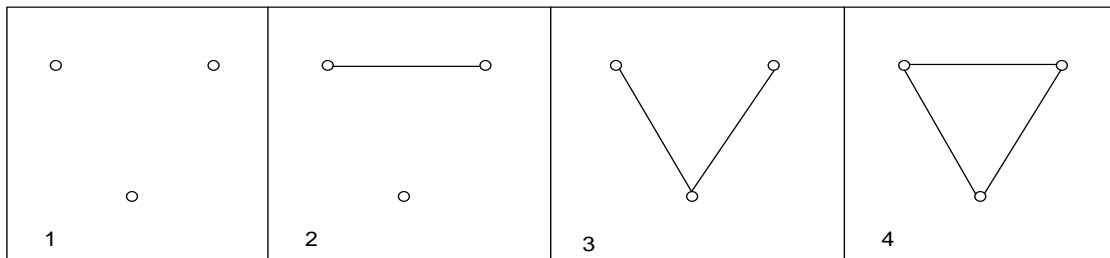


Рисунок 3. – Неізоморфні неорієнтовані прості графи з  $n = 3$  вершинами

**Завдання 4.** Чому дорівнює кількість усіх позначених неорієнтованих дерев з  $n = 4$  вершинами? Нарисувати усі ці дерева.

**Розв’язок.** За формулою Келі число позначених дерев з  $n$  вершинами дорівнює  $\tau_n = n^{n-2}$ , тому кількість усіх позначених неорієнтованих дерев з  $n = 4$  вершинами буде  $\tau_4 = n^{n-2} = 4^{4-2} = 4^2 = 16$ .

Усі ці позначені дерева наведено на рис. 4.

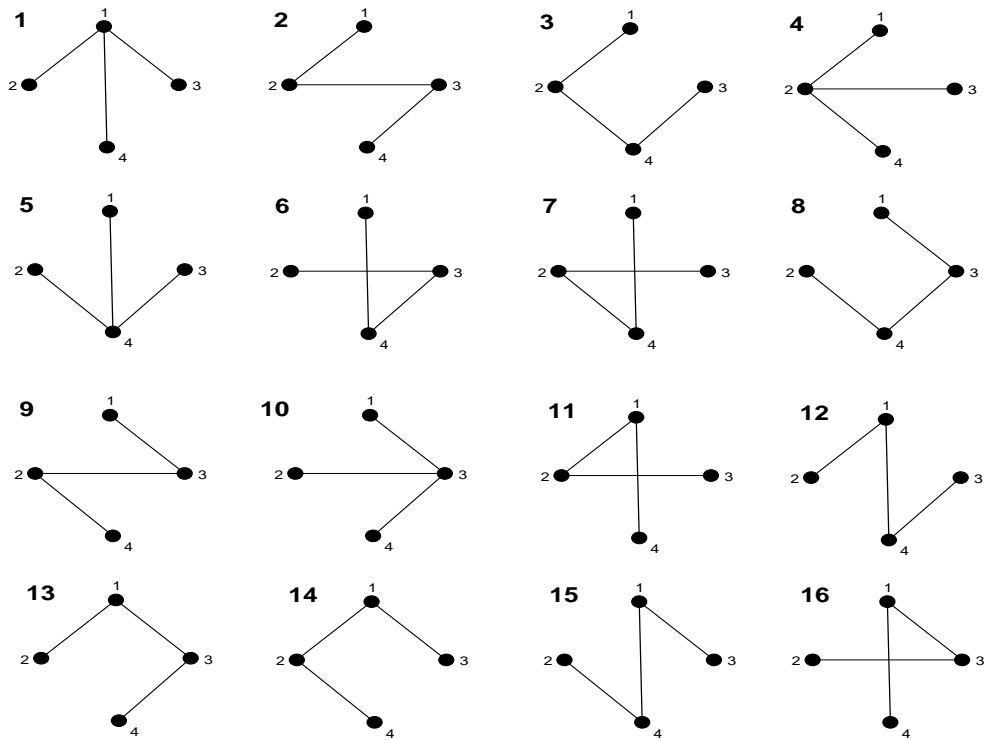


Рисунок 4. – Позначені неорієнтовані дерева з  $n = 4$  вершинами

**Завдання 5.** На рис. 5, де представлені неорієнтовані прості графи з  $n = 3$  вершинами, знайти неізоморфні дерева без позначок, нарисувати їх, підрахувати кількість  $t_3$  таких дерев.

**Розв'язок.** Число  $t_3$  звичайних (неізоморфних) дерев дорівнює 1. Це дерево наведено на рис. 5.

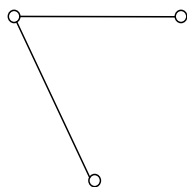


Рисунок 5. – Дерево з  $n = 3$  вершинами

**Завдання 6.** Чому дорівнює кількість  $T_n$  корневих дерев з  $n = 4$  вершинами? Нарисувати усі ці дерева.

**Розв'язок.**

Усі кореневі дерева з числом вершин  $n = 4$  представлені на рис. 6

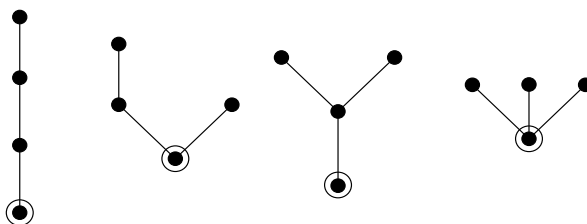


Рисунок 6. – Кореневі дерева з  $n = 4$  вершинами

### Вправи для самостійного розв'язання

**Завдання 1.** Підрахувати кількість позначених неорієнтованих простих графів з  $n = 8$  вершинами і  $m = 5$  ребрами та нарисувати декілька з таких графів.

**Завдання 2.** Підрахувати кількість усіх позначених неорієнтованих простих графів з  $n = 4$  вершинами та нарисувати ці графи.

**Завдання 3.** Підрахувати кількість усіх позначених неорієнтованих простих графів з  $n = 5$  вершинами та нарисувати тільки ті графи, у яких кількість ребер дорівнює чотирьом.

**Завдання 4.** Записати простий дріб такого виду  $\frac{G_4}{g_4}$ , де  $G_4$  – кількість усіх позначених неорієнтованих простих графів з чотирма вершинами,  $g_4$  – кількість неорієнтованих простих неізоморфних графів з чотирма вершинами

без позначок. Нарисувати усі неорієнтовані прості неізоморфні графи з чотирма вершинами без позначок.

**Завдання 5.** Знайти кількість усіх позначених неорієнтованих дерев з  $n = 5$  вершинами? Нарисувати 10 таких дерев.

**Завдання 6.** Знайти кількість простих неорієнтованих неізоморфних дерев з  $n = 5$  вершинами. Нарисувати такі дерева.

**Завдання 7.** Знайти кількість  $T_n$  корених дерев з  $n = 5$  вершинами. Нарисувати такі дерева.

**Завдання 8.** Визначити кількість остовів (каркасів, кістяків) графа  $G$ , який зображений на рис. 1. Наведіть зображення п'яти остовів.

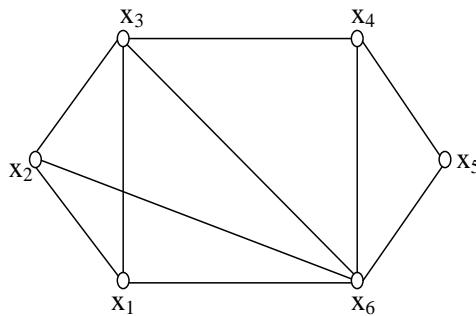


Рисунок 1. – Граф  $G$ , для якого визначається кількість остовів

**Завдання 9.** Скільки остовних дерев є у графів Понтрягіна-Куратовського ( $K_{3,3}$  і  $K_5$ )?

**Завдання 10.** Скільки остовних дерев має граф  $K_4$ ? Скільки остовних дерев має граф  $K_{n,n}$ ?