Лекція 16. Дерева. Ліс.

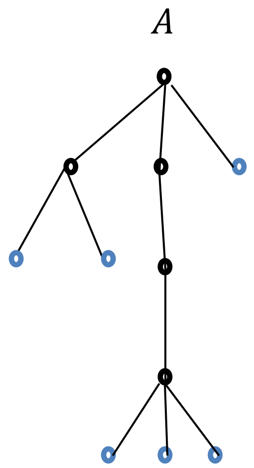
План

1. ***Дерева та їх властивості. Ліс***
2. ***Кістяк зв'язного графа. Алгоритм відшукання мінімального кістяка навантаженого графа***
3. ***Плоскі та планарні графи, необхідна та достатня умова планарності***
4. ***Розфарбовування графів. Теорема про 5 фарб***

1. *Дерева та їх властивості. Ліс*

Означення. **Дерево** – зв'язний граф, який не містить циклів. Граф, який складається з однієї вершини є деревом.

Означення. Граф, який не є зв'язним і не містить циклів називається **лісом (ациклічним).**



Тут $A -$ корінь дерева.

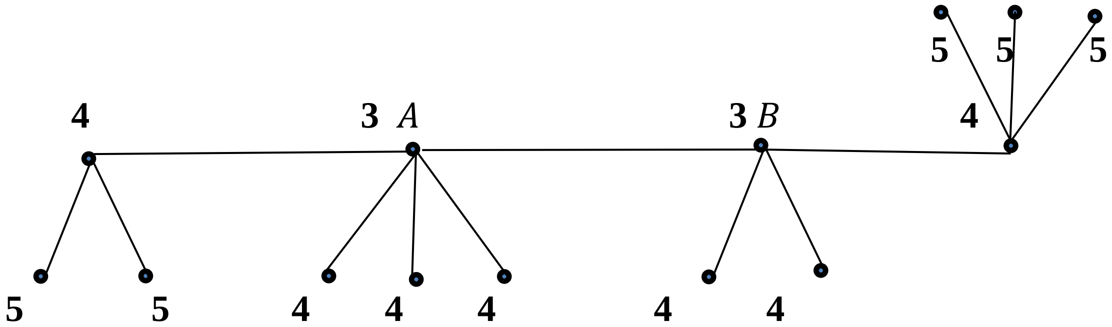
Означення. Вершина дерева степінь якої одиниця називається **висячою (листком).**

На малюнку листки виділено іншим кольором.

Теорема. Для графа $G(U,V)$ у якого n вершин і m ребер, еквівалентними є наступні твердження:

- граф G дерево;
- $G -$ зв'язний граф і $m = n - 1$;
- будь-які дві вершини, які не співпадають, можна з'єднати лише одним простим ланцюгом.

Означення. **Відстанню** від вершини A до вершини B називається довжина найкоротшого маршруту, який їх сполучає.



Підрахуємо максимальну з відстаней від кожної вершини дерева, яке зображене до всіх інших вершин цього дерева і напишемо це число біля вершин. Найменше з даних чисел називається **радіусом дерева** ($r = 3$), найбільше – **діаметром** ($d = 5$).

Означення. Вершини дерева для яких максимальна з відстаней до інших вершин дорівнює радіусу називаються **кореневими.**

Можна показати, що будь-яке дерево має одну або дві кореневі вершини. Якщо дві, то вони є суміжними.

Важливу роль у програмуванні відіграють так звані двійкові (бінарні) дерева.

Означення. **Дерево** називається **двійковим**, якщо з кожної вершини на наступний ярус веде не більше як два ребра.

Означення. **Орієнтованим деревом** $G(U, V)$ називається ациклічний орграф, який задовольняє наступні умови:

1) $\exists\, V_0 \in V : \rho^-(V_0) = 0$ (степінь входу дорівнює нулю);

2) $\forall\, V_i \in V, V_i \neq V_0 : \rho^-(V_i) = 1$ (степінь входу дорівнює одиниці);

3) $\forall\, V_i \in V, V_i \neq V_0$ існує маршрут $V_0 - V_1 - \cdots - V_i$, причому єдиний.

Означення. **Орієнтованим ліс** $-$ це орграф, який складається з кількох орієнтованих дерев.

Якщо $(V_i V_j)$ ребро орієнтованого дерева, то вершина V_i називається **батьком** вершини V_j. Вершина V_j називається **сином** вершини V_i**.**

Вершина V разом зі своїми нащадками становить піддерево дерева G, причому V $-$ корінь цього піддерева.

Теорема. Орграф $G(U, V)$ є орієнтованим деревом, якщо:

- орграф є зв’язним і існує вершина V_0, яка не має предків, і для довільної вершини $V_i \in V$ степінь входу рівний 1;

- орграф G має вершину V_0 з якої досяжна довільна інша вершина, причому маршрут, що їх з'єднує єдиний;
- орграф G має вершину V_0, яка не має предків, а решта вершин мають одного безпосереднього предка, із вершини V_0 досяжна довільна вершина цього графа.

2. Кістяк зв'язного графа. Алгоритм відшукання мінімального кістяка навантаженого графа

Означення. **Кістяком (остовим деревом)** зв'язного графа називається будь-який його підграф, який є деревом і містить усі вершини графа.

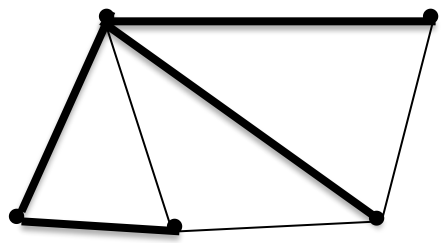
Алгоритм відшукання кістяка зв'язного графа

1. Вибираємо довільну вершину V_1 графа G. Оскільки граф зв'язний, то існує вершина суміжна вершині V_1. Позначимо її V_2. Маємо підграф, який складається з двох вершин і одного ребра. Цей граф є деревом.

2. Якщо побудоване дерево не покриває усіх вершин графа, то існує вершина суміжна вершинам побудованого дерева. Вибираємо цю вершину і відповідне ребро суміжності так, щоб не утворювався цикл з уже побудованим деревом і т.д.

3. За скінченне число кроків побудуємо кістяк даного графа.

Приклад.



Нехай G навантажений граф. Кістяк зв'язного навантаженого графа із мінімальною сумою довжин його ребер називається **мінімальним кістяком.**

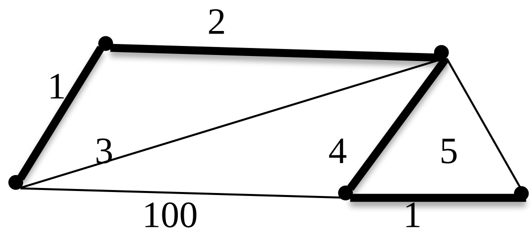
Задача відшукання мінімального кістяка виникає при проектуванні доріг, ліній електропередач, трубопроводів і т.д.

Алгоритм відшукання мінімального кістяка навантаженого графа

1. У графі вибирають ребро мінімальної довжини разом з інцидентними йому вершинами.

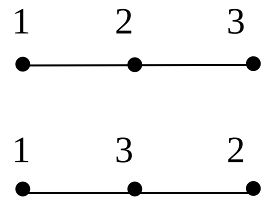
2. До побудованого дерева приєднують нове ребро мінімальної довжини, яке не утворює циклу з уже побудованим деревом. Таке ребро вибирають із множини ребер графа так, щоб один з його кінців належав уже побудованій частині дерева.

Приклад.



Виникає питання: «Скільки дерев з n вершинами можна побудувати?»

Відповідь на це питання залежить від того, чи відрізняються вершини одна від одної. Якщо розрізняються, то графи на малюнку будуть різними.



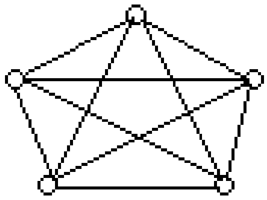
Англійський математик Артур Келлі показав, що кількість дерев з n вершинами, які розрізняються дорівнює n^{n-2}.

3. Плоскі та планарні графи, необхідна та достатня умова планарності

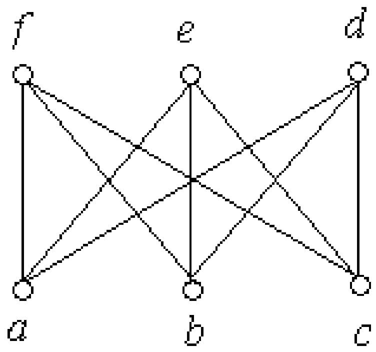
Означення. Граф називається **плоским**, якщо його вершини можна розмістити на площині так, що ніякі два його ребра не мають спільних точок, крім інцидентним їх вершин.

Означення. Довільний граф ізоморфний плоскому називається **планарним.**

В теорії графів надзвичайно важливу роль відіграють два графи, які не є планарними K_5, $K_{3,3}$.



K_5



$K_{3,3}$

Означення. Під **розбиттям ребра** AB розуміють операцію заміни одного ребра AB на два AC, CB.

Два графи називаються **гомеоморфними**, якщо вони можуть бути отримані з одного і того ж графа, або один з одного розбиттям його ребер.

Якщо граф планарний, то будь-який гомеоморфний йому граф також планарним.

Довгий час встановлення критерію планарності графів було нерозв'язною задачею теорії графів. У 1927 році радянський математик Портрягін довів, але не опублікував, а в 1930 році польський математик Куратовський довів і опублікував критерій планарності графів.

Теорема (Портрягіна-Куратовського). Граф G планарний тоді і тільки тоді, коли він не містить підграфів гомеоморфних графам $K_5,\ K_{3,3}$.

4. *Розфарбовування графів. Теорема про 5 фарб*

Артур Келлі в 1897 році на засіданні Лондонського географічного товариства поставив таку проблему: «Географічні карти друкуються кількома кольорами так, що жодні дві країни, які межують не були розфарбовані однією фарбою. Скільки кольорів потрібно щонайменше?» Усі присутні думали над цією задачею.

Нехай G планарний граф, зображений на площині. Ребра графа розбивають площину на зв'язні куски, які називають областями (країнами). Таке розбиття площини називають планарною картою.

Означення. Дві області називаються **суміжними**, якщо вони мають хоча б одне спільне ребро.

Розфарбування планарної карти у k кольорів – це розфарбування так, щоб ніякі дві сусідні області не були зафарбовані однаковим кольором.

У 1979 році англійський математик Артур Келлі висунув гіпотезу 4-ьох фарб. Але йому не вдалося довести цю гіпотезу.

Гіпотеза 4-ьох фарб. Будь-який планарний граф розфарбовується чотирма кольорами.

У 1980 році вчений Хівуд, намагаючись довести гіпотезу 4-ьох фарб, довів наступну теорему.

Теорема Хівуда. Будь-яка планарна карта може бути розфарбована у 5 кольорів.

Спочатку гіпотеза була доведена для карти, яка має 25 частин, згодом для 39. Для більшого числа частин довести гіпотезу не вдавалося. З часом стало зрозуміло, що традиційні підходи не дозволяють довести цю проблему.

У 1976 році два американських математики Хакен і Аппель запропонували новий підхід, який перевернув традиційні уявлення про математичні доведення. Їм здалося звести цю проблему до 1482 конфігурацій з яких можна скласти довільну карту. Далі вони застосовували комп’ютер для аналізу цих 1482 конфігурацій. За допомогою комп’ютера їм вдалося довести, що у кожному випадку 4-ьох фарб вистачає. Деякі математики не сприймали це доведення і тому вважається, що ця проблема не розв’язана до кінця. Традиційного доведення ще ніхто не запропонував.