Лекція 12. Задання графів та операції над ними

План

1. ***Ізоморфізм графів***
2. ***Матричне задання графів***
3. ***Частини графа і підграфи***
4. ***Операції над графами***

1. Ізоморфізм графів

Означення. Два графи $G_1(U_1, V_1)$ та $G_2(U_2, V_2)$ називаються ізоморфними, якщо між множинами V_1 та V_2 можна встановити таку взаємнооднозначну відповідність $\varphi: V_1 \leftrightarrow V_2$, щоб довільній парі вершин A, B графа G_1, які є суміжними, відповідала пара вершин $\varphi(A), \varphi(B)$ графа G_2, які є також суміжними.

Властивості ізоморфних графів

1. Кількість вершин і ребер в ізоморфних графах однакова.

2. Для неорієнтованих графів степені відповідних вершин співпадають, а для орграфів степені входу і виходу співпадають.

Дані властивості не є достатніми.

В загальному випадку задача встановлення ізоморфізму складна. Лише для деяких класів графів розроблені ефективні алгоритми, які дозволяють перевірити ізоморфізм графів.

Очевидно, що відношення бути ізоморфним є відношенням еквівалентності. Отже, множина всіх графів розбивається на класи ізоморфних графів. Ізоморфні графи ототожнюють. Про графи, які розрізняють з точністю до ізоморфізму, говорять «абстрактнийграф».

2. Матричне задання графів

При великій кількості вершин і ребер графа малюнок графа втрачає наочність. В таких випадках для задання графів і роботи з ними використовують таблиці спеціального виду, які називають матрицями.

Означення. **Матрицею суміжності** неорієнтованого графа $G(U, V)$, який має n вершин, називається матриця розмірності $n \times n$, елементи якої визначаються за правилом

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & A_i \text{ суміжна з } A_j \\ 0, & \text{у протилежному випадку} \end{cases}.$$

Означення. **Матрицею суміжності** орграфа $G'(U, V)$, який має n вершин, називається матриця розмірності $n \times n$, елементи якої визначаються за правилом

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо існує дуга } A_iA_j \\ 0, & \text{у протилежному випадку} \end{cases}$$

Матриця суміжності неорієнтованого графа симетрична і по головній діагоналі має нулі. Матриця суміжності орграфа не симетрична. Для псевдографа нулі і одиниці у матриці суміжності замінюємо кратностями ребер, які з'єднують відповідні вершини. Це дає опис графа матрицею з цілими невід'ємними елементами і навпаки: довільна матриця такого типу може інтерпретуватися, як граф.

Теорема. Два графи ізоморфні тоді і лише тоді, коли їх матриці суміжності можна отримати одна з одної однаковим переставлянням рядків і стовпців.

Означення. **Матрицею інцидентності** неорієнтованого графа $G(U, V)$, який має n вершин і m ребер, називається матриця розмірності $n \times m$, елементи якої визначаються за правилом

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & A_i \in e_j \\ 0, & \text{у протилежному випадку} \end{cases}.$$

Означення. **Матрицею інцидентності** орграфа, який має n вершин і m ребер, називається матриця розмірності $n \times m$, елементи якої визначаються за правилом

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & A_i \text{ є початком } e_j \\ -1, & A_i \text{ є кінцем } e_j \\ 0, & \text{у протилежному випадку} \end{cases}.$$

Властивості матриць

1. Для неорієнтованого мультиграфа сума елементів і i-му рядку (стовпці) матриці суміжності дорівнює степеню вершини V_i.

2. Степені виходу і входу вершин орграфа визначаються через елементи матриці суміжності за допомогою формул:

$$\rho^{+}(\ V_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \text{ (сума по рядку)},$$

$$\rho^{-}(\ V_i) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \text{ (сума по стовпці)}.$$

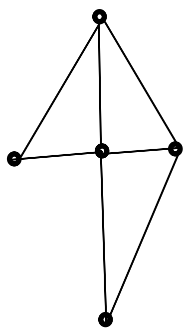
3. Для орієнтованого мультиграфа справджується твердження:
   - поелементна сума рядків матриці інцидентності дорівнює нульовому рядку;
   - рядки матриці інцидентності лінійно залежні.

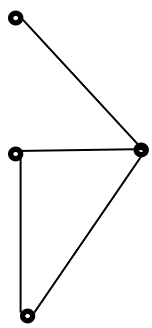
3. Частини графа і підграфи

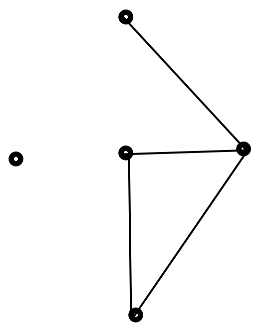
Означення. Граф H називається **частиною** графа G, якщо множина вершин графа H є підмножиною вершин графа G і усі ребра графа H є ребрами графа G.

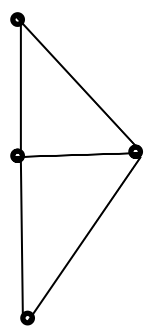
Означення. Частина H графа G, множина вершин якої співпадає з множиною вершин графа G називається **сурграфом** графа G.

Означення. Частина H графа G називається підграфом графа G, якщо множина ребер графа H є усі ребра графа G, обидва кінці яких належать частині H.


Граф G


Частина граф G


Суграф графа G


Підграф графа G

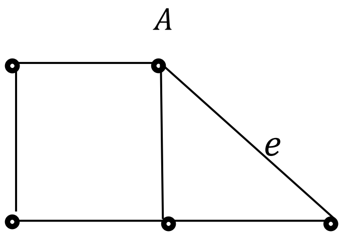
4. *Операції над графами*

Нехай дано граф $G = (U, V),\ e \in U$.

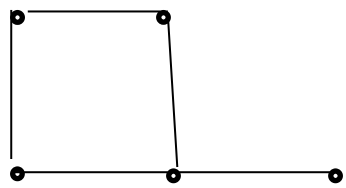
1. Операція вилучення ребра

Говорять, що граф G_1 утворений із графа G внаслідок операції **вилучення ребра** e, якщо $G_1 = (U \setminus \{e\}, V)$.

Можна показати, що в результаті виконання підряд кількох операцій вилучення ребра результат не залежить від порядку вилучення ребер.



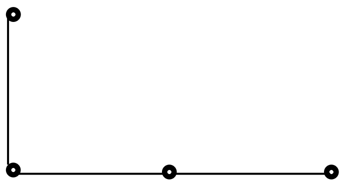
G



G_1

2. Операція вилучення вершини

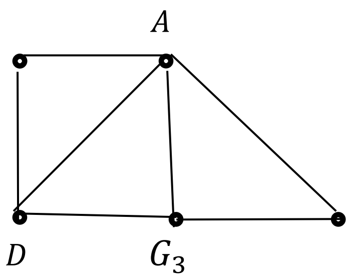
Говорять, що граф G_2 утворений із графа G внаслідок операції **вилучення вершини** A, якщо вершина A вилучається з V, а з множини U вилучаються усі ребра кінці яких інцидентні цій вершині.



G_2

3. Операція введення ребра

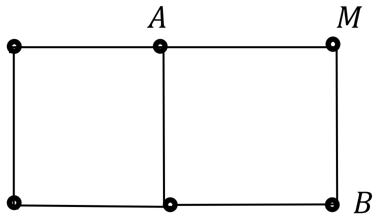
Нехай $A, D \in V; AD \notin U$. Говорять, що граф G_3 утворений із графа G внаслідок операції **введення ребра** AD, якщо $G = (U \cup \{AD\}, V)$.



G_3

4. Операція введення вершини в ребро

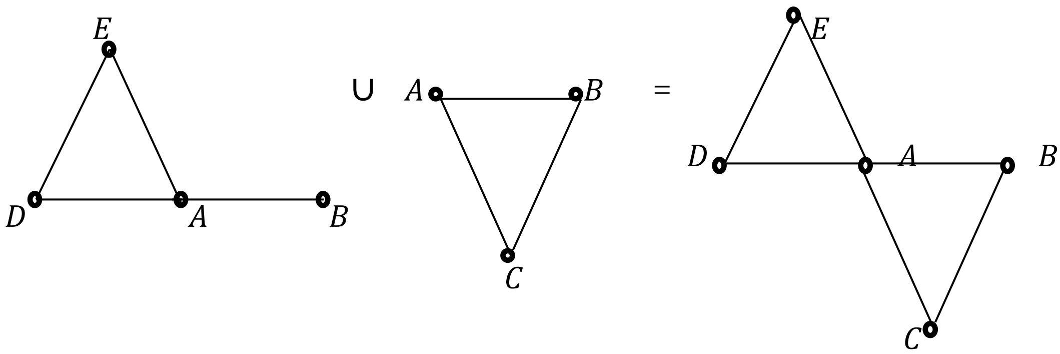
Нехай $AB \in U$. Говорять, що граф G_4 утворений із графа G внаслідок операції **введення вершини** M у ребро AB, якщо ребро AB вилучається, а добавляються два ребра AM і MB.



5. Операція об'єднання і перерізу графів

Нехай H_1 та H_2 два довільні графи, які можна розглядати, як частини деякого складнішого графа.

Означення. **Об'єднанням** двох графів H_1 та H_2 називається граф, який складається з усіх ребер, які належать принаймні одному з графів H_1 чи H_2.



Означення. Перерізом двох графів H_1 та H_2 називається граф множина вершин якого є перерізом множин вершин графів H_1 та H_2, а множина ребер є перерізом множин ребер H_1 та H_2.