Лекція 13. Зв'язність графів

План

1. Зв'язність, компоненти зв'язності

2. Зв'язок між компонентами зв'язності та відношеннями заданими на множині вершин

3. Матриці зв'язності

1. Зв'язність, компоненти зв'язності

Означення. Неорієнтований граф називається **зв'язним**, якщо для довільних двох його вершин існує маршрут, який сполучає ці вершини.

Означення. Орграф називається **сильнозв'язним**, якщо для довільних двох його вершин існує маршрут, який сполучає ці вершини.

Якщо в орграфі кожну дугу замінити ребром, то отримаємо граф, який називається **асоційованим** з даним орграфом.

Означення. Орграф називається **слабо зв'язним**, якщо асоційований з ним граф зв'язний.

Означення. **Компонентою зв'язності** графа G називається зв'язний підграф, який не є власним підграфом будь-якого іншого зв'язного підграфа графа G.

З означення компонент зв'язності випливають наступні твердження:

1. Якщо H є компонентою зв'язності графа G, то граф H є підграфом графа G, який породжується множиною вершин графа H.

2. Якщо H є сильною компонентою зв'язності орграфа G, то H є орієнтованим підграфом графа G, який породжується множиною вершин H.

Означення. Ребро AB називається **мостом** графа G, якщо після його вилучення вершини A і B стають не зв'язними.

Ознаки мостів

1. Ребро AB є мостом тоді і тільки тоді, коли AB єдиний ланцюг, який з'єднує A і B.

2. Ребро AB є мостом тоді і тільки тоді, коли знайдуться дві вершини C_1 і C_2 такі, що кожен ланцюг, який їх з'єднує містить A і B.

3. Ребро AB є мостом тоді і тільки тоді, коли воно не належить жодному циклу.

Означення. **Числом вершин зв'язності** графа G називається найменше число вершин, вилучення яких приводить до незв'язного графа, або графа, який складається з однієї вершини. Позначається $\varkappa(G)$.

Означення. **Числом реберної зв'язності** графа G називається найменше число ребер, вилучення яких приводить до незв'язного графа. Позначається $\lambda(G)$.

2. Зв'язок між компонентами зв'язності та відношеннями заданими на множині вершин

Означення. Вершини V_i та V_j графа G перебувають у **відношенні досяжності** d тоді і тільки тоді, коли вони співпадають, або існує маршрут, який їх з'єднує.

Теорема (Про зв'язок відношення досяжності з компонентами зв'язності)

Якщо $d-$ відношення досяжності задане на множині вершин графа $G(U,V)$, то:

1. Відношення d є відношенням еквівалентності на множині вершин V.

2. Довільні вершини V_i та V_j перебувають у відношенні d тоді і тільки тоді, коли вони належать одній і тій же компоненті зв'язності графа G.

3. Для будь-якого класу еквівалентності, який належить фактор множині за відношенням d псевдограф, породжений підмножиною вершин, буде компонентою зв'язності графа G.

Означення. Вершина V графа G називається **розділяючою,** якщо вилучення цієї вершини приводить до збільшення числа компонент зв'язності.

Теорема. Якщо $G'(U',V')$ псевдограф, який утворюється з псевдографа $G(U,V)$ вилученням деяких вершин, то матриця суміжності графа G' отримується з матриці суміжності графа G шляхом викреслення рядків і стовпців, що відповідають вершинам і ребрам, які вилучені.

3. *Матриці зв'язності*

Означення. **Матрицею зв'язності** неорієнтованого графа, який має n вершин, називається матриця розмірності $n \times n$, елементи якої визначаються за правилом

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } A_i \text{ досяжна з } A_j \\ 0, & \text{у протилежному випадку} \end{cases}.$$

Аналогічно дається означення **матриці зв'язності** орграфа.

Означення. **Матрицею сильної зв'язності** орграфа, який має n вершин, називається матриця розмірності $n \times n$, елементи якої визначаються за правилом

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } A_i \text{ досяжна з } A_j \text{ і навпаки} \\ 0, & \text{у протилежному випадку} \end{cases}$$