Лекція 15. Ейлерові цикли та ланцюги

План

1. ***Ейлерові графи. Теорема про ейлерові ланцюги***
2. ***Алгоритм Флері***
3. ***Гамільтонові графи***

1. Ейлерові графи. Теорема про ейлерові ланцюги

Означення. **Цикл**, який містить усі ребра графа рівно по одному разу називається **ейлеровим.** Граф, який містить ейлеровий цикл називається **ейлеровим.**

Теорема Ейлера (для графа). Для того щоб скінченний зв'язний граф мав ейлеровий цикл необхідно і достатньо, щоб усі його вершини мали парний степінь.

Теорема Ейлера (для орграфа). Для того щоб скінченний орграф мав ейлеровий цикл необхідно і достатньо, щоб степіні входу і виходу кожної вершини були рівні.

Означення. **Ланцюг** називається **ейлеровим**, якщо він має різні вершини початку і кінця та включає усі ребра графа рівно один раз.

Теорема (про ейлерові ланцюги). Для того, щоб скінченний ланцюг зв'язного графа був ейлеровим з кінцями A і B ($A \neq B$) необхідно і достатньо, щоб A і B були єдиними непарними його вершинами.

Теорема (про сім'ю ейлерових ланцюгів). На довільному зв'язному графі з $2k$ непарними вершинами існує сім'я з k ланцюгів, які в сукупності містять усі ребра графа рівно по одному разу.

2. Алгоритм Флері

Ейлеровий граф може мати декілька ейлерових циклів. Виникає питання, як знайти один з них. Відповідь дає наступний алгоритм.

Алгоритм Флері

1. Вибираємо довільну вершину V_0. Ідемо по довільному ребру позначивши його №1. Пройшовши ребро викреслимо його.

2. Якщо на k-му кроці зайшли у вершину V_k, то для наступного ходу вибираємо ребро інцидентне цій вершині. Ребро-міст вибираємо лише в тому випадку, коли інших ребер не має. Оскільки степені вершин парні, то граф може закінчити роботу лише в початковій вершині.

3. Гамільтонові графи

У 1957 році ірландський математик Гамільтон запропонував гру «Подорож по додекаедру».

Додекаедр – многогранник, гранями якого служать 12 правильних п'ятикутників. У нього 20 вершин і 30 ребер. В кожній вершині по 3 ребра.

Гра полягала в обході по ребрах усіх вершин додекаедра при умові, що в кожну вершину не можна заходити більше одного разу.

Означення. **Гамільтоновим циклом (ланцюгом)** називається цикл (ланцюг), який проходить через кожну вершину графа рівно один раз.

Означення. **Граф**, який має гамільтоновий цикл називається **гамільтоновим.**

Пошук критерію гамільтонового графа – одна з основних невирішених проблем теорії графів. Про Гамільтонові графи відомо мало. Основні результати висвітлені у таких теоремах.

Теорема 1. Будь-який повний граф є гамільтоновим.

Теорема 2 (Оре). Якщо для довільної пари несуміжних вершин графа, який містить не менше трьох вершин виконується умова $\rho(V_i) + \rho\left(V_j\right) \geq n$, де $n -$ число вершин, то граф гамільтоновий.

Теорема 3 (Дірака). Якщо число вершин графа не менше трьох і для кожної вершини $\rho(V_i) \geq \frac{n}{2}$, то граф гамільтоновий.

Дані умови не є необхідними. Наприклад, граф у вигляді куба має 8 вершин зі степенями 3. Проте умова $\rho(V_i) \geq \frac{n}{2}$ не виконується, бо $3 < \frac{8}{2}$.

Один з методів пошуку гамільтонового циклу – метод перебору. Нумерують усі вершини і розглядають перестановки вивчаючи, чи утворюють вони гамільтоновий цикл. Якщо граф з n вершинами не є гамільтоновим, то потрібно буде перебрати $(n-1)!$ перестановок. На практиці користуються алгоритмами часткового перебору, проте складність таких алгоритмів досить велика.