

РОЗДІЛ 2. ОСНОВИ ТЕОРІЇ МНОЖИН

Практичне заняття 3, 4. Множини та операції над ними.

Приклади аудиторних завдань

Завдання 1. Пояснити, чому $3 \in \{1, 2, 3, 4\}$, а $\{1, 2\} \notin \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3\}, 1, 2\}$.

Розв'язок.

Множина $\{1, 2, 3, 4\}$ складається із чотирьох елементів, одним із яких є 3, тому приналежність даного елемента множині записується як $3 \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Множина $\{\{1, 2, 3\}, \{2, 3\}, 1, 2\}$ складається із чотирьох елементів: множини $\{1, 2, 3\}$, множини $\{2, 3\}$, об'єкта (елемента множини) 1 і об'єкта (елемента множини) 2. У складі цих елементів не існує множини $\{1, 2\}$, отже, співвідношення записується як $\{1, 2\} \notin \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3\}, 1, 2\}$.

Завдання 2. Нехай задана множина $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}$. Описати цю множину за допомогою характеристичної властивості.

Розв'язок.

Множина A за допомогою характеристичної властивості записується так: $A = \{x \mid 0 < x \leq 24 \text{ і } x \text{ кратне } 3\}$.

Завдання 3. Довести, що множини $A = \{2, 5, 4, 2\}$ і $B = \{5, 4, 2\}$ рівні між собою.

Доведення.

Дві множини A і B рівні (тотожні) тоді й тільки тоді, коли кожний елемент A є елементом B і навпаки. Для даних множин ця умова виконується, отже, вони рівні між собою, тобто $A = B$.

Завдання 4. Довести, що порожня множина є підмножиною будь-якої множини.

Доведення.

Припустимо, що існує множина A така, що $\emptyset \notin A$. Це означає, що в \emptyset є деякий елемент a , що не міститься в A . Але це неможливо, тому що \emptyset не містить жодного елемента.

Завдання 5. Нехай $A = \{a, b, c, f, g, d\}$, $B = \{b, c, g, k, l\}$. Знайти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \Delta B$.

Розв'язок.

$A \cup B = \{a, b, c, f, g, d, k, l\}$, $A \cap B = \{b, c, g\}$, $A \setminus B = \{a, f, d\}$,
 $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{a, f, d, k, l\}$.

Завдання 6. Нехай $M_1 = \{x \mid \sin x = 1\}$, $M_2 = \{x = \frac{\pi}{2} \pm 2\pi k, \text{ де } k \in N_0\}$.

Довести, що $M_1 = M_2$.

Розв'язок.

Крок 1. Покажемо, що $M_1 \subseteq M_2$.

$$\forall x \in M_1 \Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \pm 2\pi k, \text{ де } k \in N_0 \Rightarrow x \in M_2 \Rightarrow M_1 \subseteq M_2.$$

Крок 2. Покажемо, що $M_2 \subseteq M_1$.

$$\forall x \in M_2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \pm 2\pi k, \text{ де } k \in N_0 \Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow x \in M_1 \Rightarrow M_2 \subseteq M_1.$$

За результатами виконання кроків 1 і 2 робимо висновок, що $M_1 = M_2$.

Завдання 7. Довести, що $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$, де A і B множини.

Розв'язок.

Крок 1. Покажемо, що $A \subseteq (A \cap B) \cup (A \setminus B)$

$$\begin{aligned} \forall x \in A &\Rightarrow (x \in A \text{ і } x \in B) \text{ або } (x \in A \text{ і } x \notin B) \Rightarrow x \in A \cap B \text{ або } x \in A \setminus B \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \setminus B) \Rightarrow A \subseteq (A \cap B) \cup (A \setminus B). \end{aligned}$$

Крок 2. Покажемо, що $(A \cap B) \cup (A \setminus B) \subseteq A$

$$\begin{aligned} \forall x \in (A \cap B) \cup (A \setminus B) &\Rightarrow x \in A \cap B \text{ або } x \in A \setminus B \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x \in A \text{ і } x \in B) \text{ або } (x \in A \text{ і } x \notin B) \Rightarrow x \in A \text{ і } (x \in B \text{ або } x \notin B) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \in A \text{ і } (x \in B \text{ або } x \notin B) \Rightarrow x \in A \Rightarrow (A \cap B) \cup (A \setminus B) \subseteq A \end{aligned}$$

За результатами виконання кроків 1 і 2 робимо висновок, що $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$.

Завдання 8. Довести справедливості тотожності $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Доведення.

Нехай $x \in A \cup (B \cap C)$, тоді $x \in A$ або $x \in B \cap C$. Якщо $x \in A$, то x належить об'єднанню A з будь-якою множиною, тобто $x \in A \cup B$ і $x \in A \cup C$, отже, x є елементом перетину множин $A \cup B$ і $A \cup C$, тобто $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Якщо $x \in B \cap C$, то $x \in B$ і $x \in C$, отже, $x \in A \cup B$ і $x \in A \cup C$, тобто і у цьому випадку x є елементом перетину тих же множин.

Таким чином, доведено $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Аналогічно доводиться і співвідношення $A \cup (B \cap C) \supseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Відповідно до визначення рівності множин приходимо до необхідної тотожності $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Завдання 9. Довести справедливість співвідношення $A \cup A = A$.

Доведення.

Співвідношення $A \cup A = A$ доводиться наступними перетвореннями з використанням тотожностей алгебри множин:

$$A \cup A = (A \cup A) \cap U = (A \cup A) \cap (A \cup \bar{A}) = A \cup (A \cap \bar{A}) = A \cup \emptyset = A.$$

Завдання 10. Указати всі підмножини множини $A = \{\{1, 3\}, \{2, 3, 5\}, 4\}$.

Розв'язок.

Кількість підмножин обчислюється за формулою 2^n , де n – кількість елементів множини A , отже, $2^3 = 8$.

Перелічимо підмножини множини A :

$$\emptyset, \{\{1,3\}\}, \{\{2,3,5\}\}, \{4\}, \{\{1,3\}, \{2,3,5\}\}, \{\{1,3\}, 4\}, \{\{2,3,5\}, 4\}, \{\{1,3\}, \{2,3,5\}, 4\}$$

.

Завдання 11. Зобразити результат виконання операції $A \cap B \cap C$, використовуючи діаграми Ейлера-Венна.

Розв'язок.

а) виконаємо операцію $A \cap B$ і зобразимо її результат D на наступній діаграмі (рис. 1).

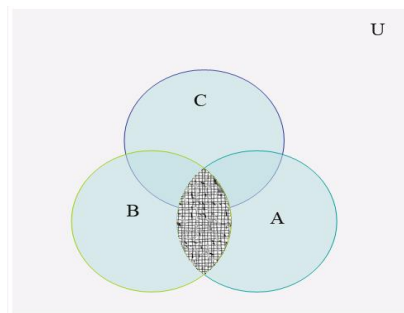


Рисунок 1. – Операція $D = A \cap B$

Множині $D = A \cap B$ буде відповідати зафарбована область діаграми.

б) виконаємо операцію $D \cap C$ і зобразимо її результат E на наступній діаграмі (рис. 2).

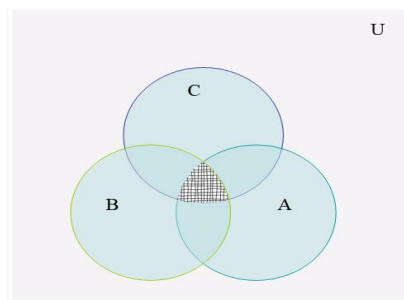


Рисунок 2 – Операція $E = D \cap C$

Множині $E = D \cap B$ буде відповідати зафарбована область на даній діаграмі, що і є результатом виконання операції $A \cap B \cap C$.

Завдання 12. Показати за допомогою діаграм Ейлера-Венна, що $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

Розв'язок.

Множина $\overline{(A \cup B)}$ є доповненням множини $(A \cup B)$, яка представлена на рис. 3, тому $\overline{(A \cup B)}$ зобразимо зафарбованою областю, показаною на рис.4.

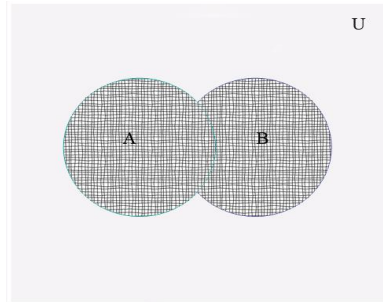


Рисунок 3 – Операція $(A \cup B)$

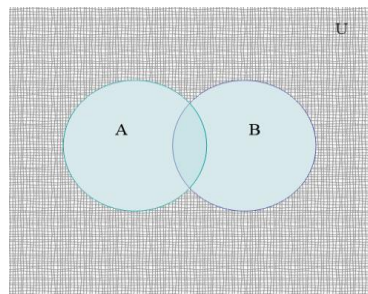
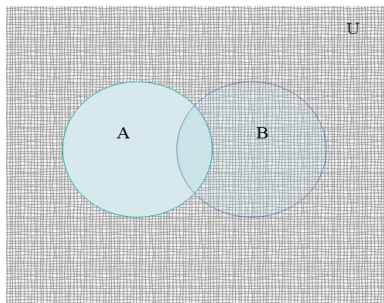
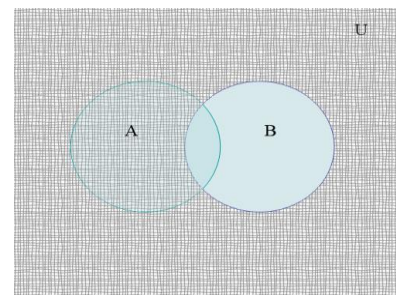


Рисунок 4 – Операція $\overline{(A \cup B)}$

Множині \bar{A} і множині \bar{B} відповідають зафарбовані області діаграм Ейлера-Венна на рис. 5.



а) операція \bar{A}



б) операція \bar{B}

Рисунок 5 – Операції \bar{A} і \bar{B}

Множині $\overline{A \cap B}$ відповідають ті частини, які зафарбовані на обох попередніх діаграмах Ейлера-Венна, тому на рис. 6 вона може бути зображена таким чином:

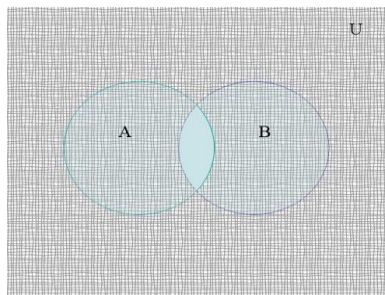


Рисунок 6. – Операція $\overline{A \cap B}$

Показали, що і множина $\overline{(A \cup B)}$, і множина $\overline{A \cap B}$ однаково зображуються на діаграмі Ейлера-Венна, тому ці множини рівні, тобто $\overline{(A \cup B)} = \overline{A \cap B}$.

Вправи для самостійного розв'язання

Завдання 1. Опишіть словами кожне із множин: а) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ділиться на } 2 \text{ і } x \text{ ділиться на } 3\}$; б) $A = \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B\}$; в) $A = \{x \mid x \in A \text{ і } x \notin B\}$.

Завдання 2. Перелічіть елементи множини $\{x \mid x - \text{ціле і } x^2 < 100\}$.

Завдання 3. Перелічіть елементи множини

$X = \{x \mid x - \text{голосна буква українського алфавіту}\}$.

Завдання 4. Опишіть множину $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ за допомогою характеристичної властивості.

Завдання 5. Перелічіть підмножини множини \emptyset .

Завдання 6. Перелічіть підмножини множини $\{a, b, c, d\}$.

Завдання 7. Визначте кількість елементів у кожній множині:

а) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$; б) $\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$; в) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, a, b, \{a, b\}, \{a, b, \{a, b\}\}\}$; г) $\{1, 2, 3, \{1, 2, 3\}\}$; д) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

Завдання 8. Нехай множина перших 20 натуральних чисел – це універсум. Запишіть такі її підмножини: A – підмножина парних чисел; B – підмножина непарних чисел; C – підмножина квадратів чисел; D – підмножина простих чисел.

Завдання 9. Чи рівні між собою множини A і B (якщо ні, то чому?):

а) $A = \{2, 5, 4\}$, $B = \{5, 4, 2\}$;

- б) $A = \{1, 2, 4, 2\}$, $B = \{1, 2, 4\}$;
 в) $A = \{2, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 3\}$;
 г) $A = \{1, \{2, 5\}, 6\}$, $B = \{1, \{5, 2\}, 6\}$;
 д) $A = \{1, \{2, 5\}, 6\}$, $B = \{1, 2, 5, 6\}$.

Завдання 10. Доведіть, що $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$, де A і B – множини.

Завдання 11. Нехай $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, а $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$. Визначити множини: 1) $A \cup C$; 2) $A \cap B$; 3) $A \cup (B \cup C)$; 4) $(A \cap B) \cup C$; 5) $\overline{(A \cap B)}$; 6) $\overline{A} \cap \overline{B}$; 7) $A \Delta B$; 8) $A - B$.

Завдання 12. Чи існують такі множини A , B , C , що $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $(A \cap B) \setminus C = \emptyset$?

Завдання 13. Доведіть наступну рівність $\overline{(A \cup B)} \cap A = A \cap \overline{B}$.

Завдання 14. Доведіть рівність $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Завдання 15. Доведіть за допомогою тотожних перетворень співвідношення: $A \setminus (A \setminus B) = B \setminus (B \setminus A)$; $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.

Результат перевірте за допомогою діаграм Ейлера-Венна.

Завдання 16. У якому відношенні перебувають множини A і B , якщо $A \setminus B = B \setminus A = \emptyset$?

Завдання 17. Покажіть справедливість тотожностей: а) $\overline{\overline{A \cap B} \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; б) $(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) = B \cap C$.

Завдання 18. Виходячи з відношення приналежності, доведіть справедливість наступних виразів: а) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$; б) $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$; в) $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$; г) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Завдання 19. Використовуючи діаграми Ейлера-Венна, покажіть рівність двох множин $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Завдання 20. Для кожної з наведених нижче множин використовуйте діаграму Ейлера-Венна і заштрихуйте ті її частини, які зображують задані множини: 1) $A - B$; 2) $\overline{(A \cap B)}$; 3) $(A \cup B) - A \cap B$; 4) $A \cup (B \cap C)$; 5) $(B - C) - A$; 6) $B - (A \cup C)$; 7) $\overline{(A \cap B \cap C)}$.

Завдання 21. Знайдіть наступні множини: а) $\emptyset \cap \{\emptyset\}$; б) $\{\emptyset\} \cap \{\emptyset\}$; в) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \emptyset$; г) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \setminus \{\{\emptyset\}\}$.