РОЗДІЛ 3. ВІДНОШЕННЯ НА МНОЖИНАХ

Практичне заняття 5, 6. Відповідності між множинами. Відношення на множинах

Приклади аудиторних завдань

Завдання 1. Перелічити елементи декартового добутку двох множин: $X=\{1,2,3\}$ і $Y=\{0,1\}$.

Розв'язок.

$X\times Y=\{(1,0),\{1,1\},(2,0),(2,1),(3,1),(3,1)\}$;

$Y\times X=\{(0,1),\{0,2\},(0,3),(1,1),(1,2),(1,3)\}$.

Завдання 2. Нехай X – множина точок відрізка $[0,1]$, а Y – множина точок відрізка $[1,2]$. Визначити множину точок $X\times Y$.

Розв'язок.

$X\times Y$ є множиною точок квадрата $[0,1]\times[1,2]$ з вершинами в точках $(0,1),\ (0,2),\ (1,1),\ (1,2)$.

Завдання 3. Нехай задані множини $A=\{a,b,c\}$, $B=\{\alpha,\beta,\delta,\varepsilon,\lambda\}$, $C=\{5,6\}$, $D=\{\to,\uparrow,\Rightarrow\}$. Визначити потужність множин $A\times B\times C\times D$ і B^4.

Розв'язок.

Потужність множини $A\times B\times C\times D$ дорівнює $|A\times B\times C\times D|=3\cdot5\cdot2\cdot3=90$, де $|A|=3$, $|B|=5$, $|C|=2$, $|D|=3$. Потужність множини B^4 дорівнює $|B\times B\times B\times B|=|B^4|=|B|^4=5\cdot5\cdot5\cdot5=5^4=625$.

Завдання 4. Скласти 16 різних відношень на множині $\{0,1\}$.

Розв'язок.

Із двох елементів 0 і 1 ($m=2$) можна скласти $2^m=2^2=4=n$ наборів $(1,2),\ (0,1),\ (1,0),\ (1,1)$.

Усього відношень на даних наборах можна скласти $2^{n^2}=2^{2^2}=2^4=16$.

Перелічимо ці відношення: $R_1=\{(0,0),(0,0)\}$, $R_2=\{(0,0),(0,1)\}$, $R_3=\{(0,0),(1,0)\}$, $R_4=\{(0,0),(1,1)\}$, $R_5=\{(0,1),(0,0)\}$, $R_6=\{(0,1),(0,1)\}$, $R_7=\{(0,1),(1,0)\}$, $R_8=\{(0,1),(1,1)\}$, $R_9=\{(1,0),(0,0)\}$, $R_{10}=\{(1,0),(0,1)\}$, $R_{11}=\{(1,0),(1,0)\}$, $R_{12}=\{(1,0),(1,1)\}$, $R_{13}=\{(1,1),(0,0)\}$, $R_{14}=\{(1,1),(0,1)\}$, $R_{15}=\{(1,1),(1,0)\}$, $R_{16}=\{(1,1),(1,1)\}$.

Завдання 5. Знайти область визначення та область значень відношень:

а) $\{(a,1),(a,2),(c,1),(c,2),(c,4),(d,5)\}$;

б) $\{(1,2), (2,4), (3,6), (4,8), \ldots\}$,

с) $\{(x, y) \mid x, y \in R \ и \ \ x = y^2\}$, де R – множина дійсних чисел.

Розв’язок.

Для а) область визначення відношення – це множина $\{a, c, d\}$, область значень – це множина $\{1, 2, 4, 5\}$; для б) область визначення – це множина $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, область значень – це множина $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$; для с) область визначення – це множина $\{x \mid x \in R \ и \ \ x \geq 0\}$, область значень – R (множина дійсних чисел).

Завдання 6. Нехай $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Задати в явному виді (списком) і матрицею відношення R, задане на множині $M \times M$, якщо R означає «бути строго менше».

Розв’язок.

Відношення R, як множина, містить усі пари елементів (a, b) з M такі, що $a < b$. Тоді задане у вигляді списку відношення буде мати вигляд $R = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6), (4,5),$ $(4,6), (5,6)\}$. Матриця відношення $R = \rho$ представлена на рис. 1.

$$\rho = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Рисунок 1. – Матриця відношення $R = \rho$

Завдання 7. Побудувати на множині $A = \{a, b, c, d, e\}$ граф відношення $R = \{(a,b), (b,a), (b,c), (c,b), (c,d), (d,c), (d,a), (a,d)\}$.

Розв’язок.

Граф відношення R представлений на рис. 2.

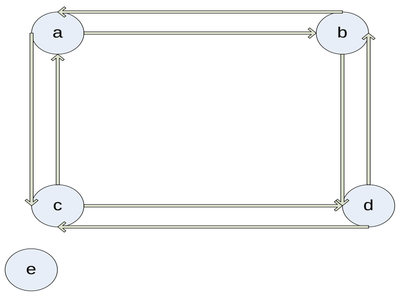


Рисунок 2.– Граф відношення R

Завдання 8. Нехай задані множини $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$; $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ і таке відношення на цих множинах:
$R = \{ (x_1, y_1), (x_1, y_3), (x_2, y_1), (x_2, y_3), (x_2, y_4), (x_3, y_1), (x_3, y_2), (x_3, y_4), (x_4, y_3),$

$(x_5, y_2), (x_5, y_4) \}$. Визначити фактор-множину $Y \setminus R$ і переріз відношення за підмножиною $B = \{x_2, x_3\}$.

Розв'язок.

Очевидно, $R(x_1) = \{y_1, y_3\}$; $R(x_2) = \{y_1, y_3, y_4\}$ та ін.

Випишемо переріз за всіма елементами множини X у такому вигляді:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\{y_1, y_3\}$	$\{y_1, y_3, y_4\}$	$\{y_1, y_2, y_4\}$	$\{y_3\}$	$\{y_2, y_4\}$

Об'єднання множин другого рядка утворять фактор-множину $Y \setminus R = \{\{y_1, y_3\}, \{y_1, y_3, y_4\}, \{y_1, y_2, y_4\}, \{y_3\}, \{y_2, y_4\}\}$.

Об'єднання перерізів за елементами підмножини $B \subset X$ є перерізом $R(B)$ відношення R за підмножинами B, тобто $R(B) = \bigcup_{x \in X} R(x)$.

Так, для $B = \{x_2, x_3\}$, $R(B) = \{y_1, y_2, y_3, y_4\} = R(x_2) \cup R(x_3)$.

Завдання 9. Нехай задані два відношення:
$A = \{(x_1, y_1), (x_1, y_3), (x_2, y_1), (x_2, y_3), (x_2, y_4), (x_3, y_1), (x_3, y_2), (x_3, y_4), (x_4, y_3),$
$(x_5, y_2), (x_5, y_4)\}$ и $B = \{(y_1, z_2), (y_2, z_1), (y_2, z_2), (y_3, z_3), (y_4, z_3)\}$

Знайти композицію $C = B \circ A$, переріз $C(x_3)$.

Розв'язок.

Композиція відношень A і B буде дорівнювати:
$C = \{(x_1, z_2), (x_1, z_3), (x_2, z_2), (x_2, z_3), (x_3, z_1), (x_3, z_2), (x_3, z_3), (x_4, z_3), (x_5, z_1), (x_5, z_2 (x_5, z_3)\}$
Переріз $C(x_3) = \{z_1, z_2, z_3\}$.

Завдання 10. Нехай $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{6, 7, 8, 9\}$, $C = \{10, 11, 12, 13\}$, $D = \{\Omega, \Delta, \mathrm{O}, *\}$ і нехай відношення $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$, $T \subseteq C \times D$ визначені таким чином $R = \{(1{,}7), (4{,}6), (5{,}6), (2{,}8)\}$, $S = \{(6{,}10), (6{,}11), (7{,}10), (8{,}13)\}$, $T = \{(11, \Delta), (10, \Delta), (13, *), (12, \Omega), (13, \mathrm{O})\}$. Визначити R^{-1}, S^{-1}, $R^{-1} \circ S^{-1}$, $T \circ S$.

Розв'язок.

$R^{-1} = \{(7{,}1), (6{,}4), (6{,}5), (8{,}2)\}$, $S^{-1} = \{(10, 6), (11, 6), (10{,}7), (13, 8)\}$,

$R^{-1} \circ S^{-1} = \{(10, 4), (10{,}5), (11, 4), (11, 5), (10{,}1), (13, 2)\}$,

$T \circ S = \{(6,\Delta), (7,\Delta), (8,*), (8,\text{O})\}$.

Завдання 11. Нехай $A = \{a, b, c, d, e\}$, S, T, U, V – відношення на A, де

$S = \{(a,a), (a,b), (b,c), (b,d), (c,e), (e,d), (c,a)\}$;

$T = \{(a,b), (b,a), (b,c), (b,d), (e,e), (d,e), (c,b)\}$;

$U = \{(a,b), (a,a), (b,c), (b,b), (e,e), (b,a), (c,b), (c,c), (d,d), (a,c), (c,a)\}$;

$V = \{(a,b), (b,c), (b,b), (e,e), (b,a), (c,b), (d,d), (a,c), (c,a)\}$

Яке з відношень є рефлексивним? Яке з відношень є симетричним?

Розв'язок.

Рефлексивним є відношення U (має елементи $(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e)$).

Симетричним є відношення U і V.

Завдання 12. Нехай задана множина $A = \{\Pi, \Delta, \text{O}, \Omega\}$ і нехай выдношення $R \subseteq A \times A$ визначено у вигляді

$R = \{(\Pi,\Pi), (\Pi,\Delta), (\Pi,\Omega), (\Delta,\Pi), (\Omega,\Pi), (\Omega,\Omega), (\text{O},\Omega), (\text{O},\text{O})\}$.

Чи є відношення R відношенням еквівалентності?

Розв'язок.

R не є рефлексивним, тобто $\Delta \in A$, але $(\Delta,\Delta) \notin R$.

R не є симетричним, оскільки $(\text{O},\Omega) \in R$, але $(\Omega,\text{O}) \notin R$.

R не є антисиметричним, оскільки $(\Delta,\Pi) \in R$ і $(\Pi,\Delta) \in R$, але $\Delta \neq \Pi$.

R не є транзитивним, тому що $(\Delta,\Pi) \in R$ і $(\Pi,\Omega) \in R$, але $(\Delta,\Omega) \notin R$.

Отже, відношення R не є відношенням еквівалентності.

Завдання 13. Яке з наведених нижче відношень R є відношенням часткового порядку на множині $A = \{a, b, c, d\}$?

а) $R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (a,c), (b,c), (c,d), (a,d), (b,d)\}$;

б) $R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (a,b), (b,c), (c,d), (d,a)\}$;

в) $R = \{(b,b), (c,c), (d,d), (a,c), (b,c), (c,d), (a,d), (b,d)\}$;

г) $R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (a,b), (b,c), (a,c), (a,d), (b,d), (c,d)\}$.

Розв'язок.

Відношенням часткового порядку на множині $A = \{a, b, c, d\}$ є відношення R з пунктів а) і г).

Завдання 14. Для відношення нестрогого порядку $A \subset X \times X$ («бути дільником») на множині $X = \{1, 2, 3, 4\}$ знайти матрицю відношення.

Розв'язок.

Матриця відношення має такий вигляд

	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	1	1	0	0
3	1	0	1	0
4	1	1	0	1

Вправи для самостійного розв'язання

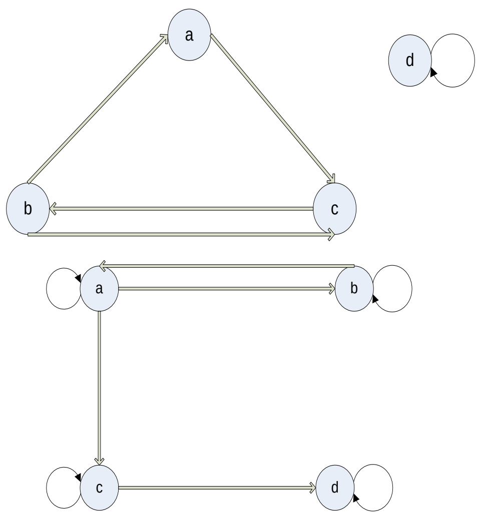
Завдання 1. Знайти декартів добуток множин $X = \{\nabla, \infty, \sum\}$, $Y = \varnothing$ і $Z = \{a, b, c, d, e, f\}$.

Завдання 2. Нехай $B = \{x \in N \mid 1 < x < 4\}$ і $C = \{x \in N \mid x^2 - 4 = 0\}$, де N – множина натуральних чисел. З яких елементів складаються множини $B \times C$ і $C \times B$?

Завдання 3. Побудувати граф і записати список елементів для відношення, яке визначене на множині $A = \{a, b, c\}$ наступною матрицею

	a	b	c
a	1	1	1
b	1	0	1
c	1	1	1

Завдання 4. Побудувати матрицю і записати список елементів для відношень A і B, що задаються графічно на рис. 1.



а) відношення A б) відношення B

Рисунок 1. – Відношення A і B, що задаються графічно

Завдання 5.

Дано дві множини $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$ і $Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4\}$ і визначене бінарне відношення $A=\{(x_1,y_2),(x_2,y_1),(x_2,y_2),(x_4,y_2),(x_4,y_3),(x_5,y_1),(x_5,y_3)\}$.

Для даного відношення:

а) записати область визначення і область значень;

б) визначити переріз за кожним елементом з X;

в) визначити переріз за підмножинами $X_1=\{x_1, x_4\}$ і $X_2=\{x_2, x_3, x_5\}$;

г) записати матрицю і нарисувати граф;

д) визначити симетричне (обернене) відношення A^{-1}.

Завдання 6. Нехай X – множина студентів, Y – множина дисциплін. Співвідношення xAy, де $x\in X$ і $y\in Y$, означає «студент x вивчає дисципліну y». Дайте словесний опис областей визначення і значень, перерізів і оберненого відношення, отриманих у завданні 5.

Завдання 7. Нехай задане відношення R_1 і відношення R_2 на множині $A=\{1, 2, 3, 4\}$ ($R_1\subset A^2$ і $R_2\subset A^2$): $R_1=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1)\}$; $R_2=\{(1,1),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3)\}$.

Знайти відношення $R_1\cup R_2$, $R_1\cap R_2$, $R_1\setminus R_2$, $R_2\setminus R_1$, $\overline{R_1}$, $\overline{R_2}$, $R_1\times R_2$ і визначити їхню потужність.

Завдання 8. Нехай $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{6,7,8,9\}$, $C=\{10,11,12,13\}$, $D=\{\Omega,\Delta,\mathrm{O},*\}$ і нехай відношення $R\subseteq A\times B$, $S\subseteq B\times C$, $T\subseteq C\times D$ визначені таким чином $R=\{(1,7),(4,6),(5,6),(2,8)\}$, $S=\{(6,10),(6,11),(7,10),(8,13)\}$, $T=\{(11,\Delta),(10,\Delta),(13,*),(12,\Omega),(13,\mathrm{O})\}$. Визначити $S\circ R$, $S\circ S^{-1}$, $(T\circ S)\circ R$.

Завдання 9. Доведіть наступні властивості симетризації та композиції відношень: а) $(A\circ B)^{-1}=B^{-1}\circ A^{-1}$; б) $(A\cup B)^{-1}=A^{-1}\cup B^{-1}$; в) $(A\cap B)^{-1}=A^{-1}\cap B^{-1}$; г) $(A^{-1})^{-1}$.

Завдання 10. Нехай $A=\{a,b,c\}$, $B=\{1,2,3,4\}$, $P_1\subseteq A\times B$, $P_2\subseteq B^2$.

Задати відношення $P_1=\{(b,2),(a,3),(b,1),(b,4),(c,1),(c,2),(c,4)\}$ і відношення $P_2=\{(1,1),(1,2),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(3,2),(3,4),(4,4)\}$ за допомогою графів, знайти матрицю оберненого відношення $(P_1\circ P_2)^{-1}$.

Перевірити за допомогою матриці відношення P_2, чи є воно рефлексивним, симетричним, антисиметричним, транзитивним.

Завдання 11. Показати, що бінарне відношення $P=\{(x,y)\,|\,x,y\in R,\ |x-y|\le 1\}$ є рефлексивним, симетричним і нетранзитивним.

Завдання 12. Нехай задана множина $A=\{a,b,c,d,e\}$, S,T,U,V – відношення на A, де

$S=\{(a,a),(a,b),(b,c),(b,d),(c,e),(e,d),(c,a)\}$;

$T=\{(a,b),(b,a),(b,c),(b,d),(e,e),(d,e),(c,b)\}$;

$U=\{(a,b),(a,a),(b,c),(b,b),(e,e),(b,a),(c,b),(c,c),(d,d),(a,c),(c,a)\}$;

$V=\{(a,b),(b,c),(b,b),(e,e),(b,a),(c,b),(d,d),(a,c),(c,a)\}$

Яке з відношень S,T,U,V є транзитивним? Яке з відношень S,T,U,V є антисиметричним?

Завдання 13. Нехай задана множина $A=\{a,b,c,d,e\}$. Опишіть відношення R, яке задане на множині A, що є рефлексивним і симетричним, але не є транзитивним.

Завдання 14.

Нехай $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ і нехай відношення $R\subseteq A\times A$ є множина $R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(1,2),(1,4),(2,1),(2,4),(3,5),(5,3),(4,1),(4,2)\}$. Показати, що відношення R є відношенням еквівалентності.

Завдання 15. Яке з наведених нижче відношень R є відношенням часткового порядку на множині $A=\{a,b,c,d\}$?

а) A – множина всіх людей, а відношення R визначене як xRy, якщо x старіше за y;

б) A – множина всіх громадян України, а відношення R визначене як xRy, якщо x має більший номер картки соціального страхування, ніж y;

в) A – множина цілих чисел, R визначено як xRy, якщо $x\ge 2y$.

Завдання 16. Для відношення строгого порядку «>» на множині $X=\{1,2,3,4,5\}$ матриця має вигляд

	1	2	3	4	5
1		1	1	1	1
2			1	1	1
3				1	1
4					1
5					

Записати відношення у вигляді списку елементів.

Завдання 17. Нехай задане відношення на множині цілих чисел Z: $P = \{(x, y) \mid x, y \in Z;\ (x - y) < 1;\ 0 \le x \le 2;\ 0 \le y \le 2\}$.

Перевірити, чи є це відношення частково впорядкованим.

Завдання 18. На множині прямих на площині розглянемо відношення перпендикулярності прямих. Визначити, чи буде це відношення відношенням еквівалентності на цій множині.

Завдання 19. На множині прямих на площині розглянемо відношення паралельності прямих. Визначити, чи буде це відношення відношенням еквівалентності на цій множині.

Завдання 20. Розглянемо множину кіл, центри яких перебувають на осі абсцис у точках x таких, що $x \in Z$, де Z – цілі числа. Знайти потужність класів розбивки відношень рівності кіл (кола рівні, якщо їхні радіуси рівні).