РОЗДІЛ 5. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ГРАФІВ

Практичне заняття 10. Основні поняття теорії графів

Приклади аудиторних завдань

Завдання 1. Визначити степінь кожної вершини графа G, який зображений на рис 1. Побудувати його доповнення.

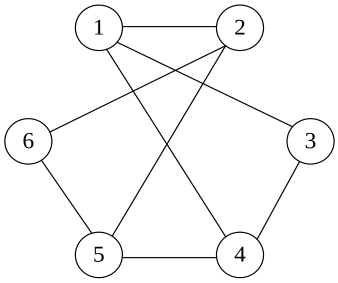
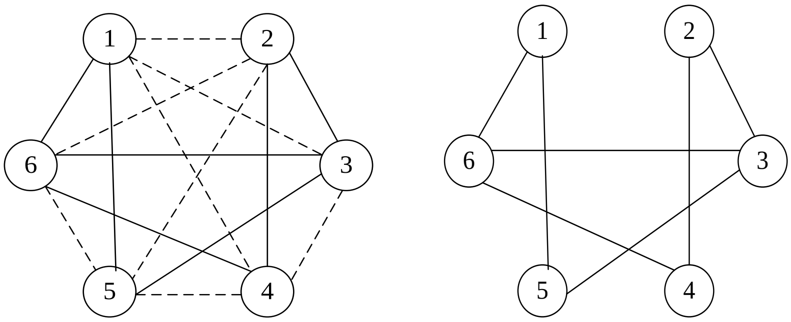


Рисунок 1. – Граф G

Розв'язок. Степені вершин визначаються кількістю ребер, які їй інцидентні. Тому: $\delta(1) = \deg 1 = 3$; $\delta(2) = \deg 2 = 3$; $\delta(3) = \deg 3 = 2$; $\delta(4) = \deg 4 = 3$; $\delta(5) = \deg 5 = 3$; $\delta(6) = \deg 6 = 2$.

Доповнення графа будується таким чином: з повного графа на 6-ти вершинах K_6 вилучаються ті ребра, які належать графу G. На рис. 2.а) ребра графа G відзначені пунктиром.



а) б)

Рисунок 2. – Граф K_6 (а) і доповнення графа G (б)

Перевірити правильність побудови можна так: сума степенів однойменних вершин графа G і його доповнення дорівнює 5 (степінь вершин графа K_6).

Завдання 2. Для орієнтованого графа G, який зображений на рис. 3., для кожної вершини визначити півстепені «виходу і заходу» (додатний степінь і від'ємний степінь), степінь вершини.

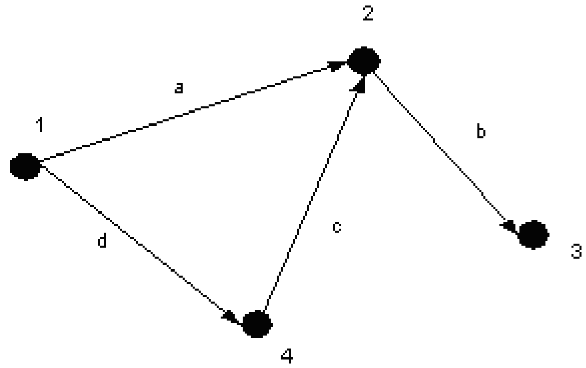
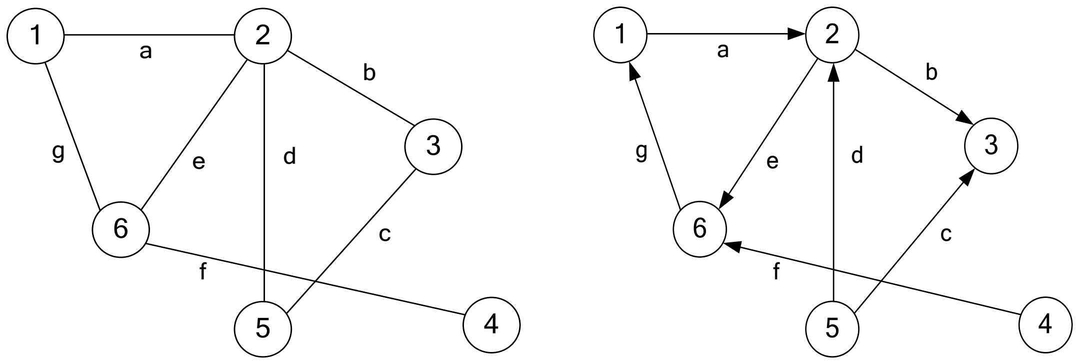


Рисунок 3. – Орієнтований граф G

Розв’язок. Додатний степінь вершини $\delta^{+}(x)$ – число дуг, що починаються у вершині x. Від’ємний степінь вершини $\delta^{-}(x)$ – число дуг, що закінчуються у вершині x. Степінь вершин графа G дорівнює $\delta(x) = \delta^{+}(x) + \delta^{-}(x)$.

Для графа G додатні степені усіх вершин такі: $\delta^{+}(1) = 2$, $\delta^{+}(2) = 1$, $\delta^{+}(3) = 0$, $\delta^{+}(4) = 1$. Від’ємні степені усіх вершин графа G такі: $\delta^{-}(1) = 0$, $\delta^{-}(2) = 2$, $\delta^{-}(3) = 1$, $\delta^{-}(4) = 1$. Степені вершин графа G: $\delta(1) = \delta^{+}(1) + \delta^{-}(1) = 2 + 0 = 2$, $\delta(2) = \delta^{+}(2) + \delta^{-}(2) = 1 + 2 = 3$, $\delta(3) = \delta^{+}(3) + \delta^{-}(3) = 0 + 1 = 1$, $\delta(4) = \delta^{+}(4) + \delta^{-}(4) = 1 + 1 = 2$.

Завдання 3. Побудувати матриці суміжності та інциденцій для неорієнтованого графа G_1 й орієнтованого графа G_2 (рис. 4. а) та б) відповідно).



а) G_1 б) G_2

Рисунок 4. – Графи G_1 і G_2

Розв'язок. Будуємо матрицю суміжності C_1 графа G_1, рядки й стовпці якої позначаємо вершинами графа (табл. 1).

Таблиця 1. – Матриця суміжності C_1 неорієнтованого графа G_1

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	0	0	1
2	1	0	1	0	1	1
3	0	1	0	0	1	0
4	0	0	0	0	0	1
5	0	1	1	0	0	0
6	1	1	0	1	0	0

Для неорієнтованого графа G_1 матриця C_1 симетрична. Елемент c_{ij} матриці суміжності C_1 дорівнює 1, якщо вершини i й j суміжні, і 0 у противному випадку. Тому що граф G_1 простий (не має петель і кратних ребер), на головній діагоналі розташовані 0, а всі елементи матриці мають значення 0 або 1. Сума чисел у рядку (і у стовпці) дорівнює степені вершини.

Матриця інциденцій B_1 будується таким чином: рядки її відповідають вершинам, стовпці – ребрам графа G_1 (табл. 2). Елемент b_{ij} дорівнює 1, якщо вершина інцидентна ребру, і 0 – у противному випадку.

Таблиця 2 – Матриця інциденцій B_1 неорієнтованого графа G_1

	a	b	c	d	e	F	g
1	1	0	0	0	0	0	1
2	1	1	0	1	1	0	0
3	0	1	1	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	1	0
5	0	0	1	1	0	0	0
6	0	0	0	0	1	1	1

У кожному стовпці повинні перебувати тільки 2 одиниці. Сума чисел у рядку дорівнює степені вершини.

Будуємо матрицю суміжності C_2 графа G_2, рядки й стовпці якої позначаємо вершинами графа (табл. 3).

Таблиця 3 – Матриця суміжності C_2 орієнтованого графа G_2

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	1
3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	1
5	0	1	1	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0

Для орієнтованого графа G_2 матриця C_2 несиметрична. Елемент c_{ij} матриці суміжності C_2 дорівнює 1, якщо з вершини i у вершину j веде дуга, і 0 у противному випадку. Тому що граф G_2 простий (не має петель і кратних ребер), на головній діагоналі розташовані 0, а всі елементи матриці мають значення 0 або 1. Сума чисел у рядку дорівнює напівстепені виходу вершини, а у стовпці – напівстепені заходу вершини.

Матриця інциденцій B_2 будується таким чином: рядки її відповідають вершинам, стовпці – ребрам графа G_2 (табл. 4). Елемент b_{ij} дорівнює 1, якщо вершина є початком дуги, (-1) – якщо вершина – кінець дуги, і 0 – якщо вершини й дуга не інцидентні.

Сума чисел у стовпці дорівнює нулю.

Таблиця 4 – Матриця інциденцій B_2 орієнтованого графа G_2

	a	b	c	D	e	F	g
1	1	0	0	0	0	0	-1
2	-1	1	0	-1	1	0	0
3	0	-1	-1	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	1	0
5	0	0	1	1	0	0	0
6	0	0	0	0	-1	-1	1

Завдання 4. Використовуючи матрицю суміжності (табл. 5), побудувати діаграму графа G і визначити, чи є він орієнтованим або неорієнтованим.

Таблиця 5 – Матриця суміжності графа G

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	0	0	0
2	0	0	1	0	0	1
3	0	0	0	1	0	0
4	1	0	0	0	1	1
5	0	1	0	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0

Розв'язок. Матриця суміжності несиметрична, тому граф орієнтований. Кількість вершин – 6. Будуємо граф: з вершини 1 ведуть дуги у вершини 2 і 3; з вершини 2 – у вершини 3 і 6; з вершини 3 – у вершину 4; з вершини 4 – у вершини 1, 5 і 6; з вершини 5 – у вершину 2; з вершини 6 – у вершину 1.

Перевірити правильність побудови можна, порахувавши напівстепені виходу (сума цифр у рядку) і напівстепені заходу (сума цифр у стовпці) для кожної вершини. Граф, що відповідає матриці суміжності (табл. 5), зображений на рис. 5.

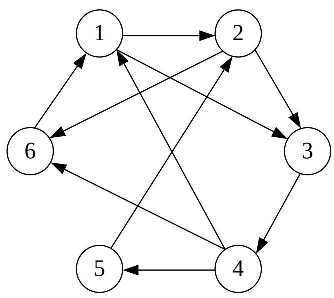


Рисунок 5. – Граф G

Завдання 5. Використовуючи матрицю інциденцій (табл. 6), побудувати діаграму графа G і визначити, чи є він орієнтованим або неорієнтованим.

Таблиця 6. – Матриця інциденцій графа G

	a	b	c	d	e	F	g
1	1	0	0	0	1	0	0
2	0	1	0	1	0	0	0
3	0	0	1	0	0	1	0
4	1	1	0	0	0	1	0
5	0	0	0	1	0	0	1
6	0	0	1	0	1	0	1

Розв'язок. У матриці G немає значень (-1), тому можна зробити висновок про те, що граф неорієнтований. Кількість вершин дорівнює 6, кількість ребер – 7. Будуємо порожній граф на шести вершинах і з'єднуємо їх ребрами: ребро a з'єднує вершини 1 і 4, ребро b – вершини 2 і 4, і т.д. Граф, що відповідає матриці інциденцій (табл. 6), зображений на рис. 6.

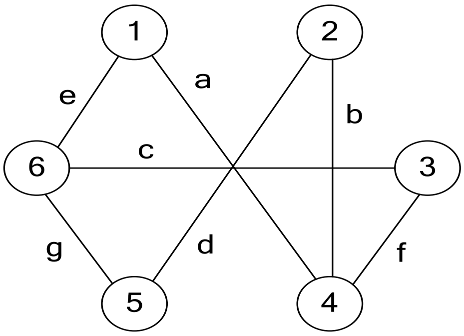


Рисунок 6. – Граф G

Завдання 6. Довести ізоморфізм графів $G_1(X_1, Y_1)$ і $G_2(X_2, Y_2)$, де $X_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $X_2 = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $Y_1 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 6), (1, 7), (2, 3),$ $(2, 4), (2, 7), (3, 4), (3, 5), (4, 5), (4, 6), (5, 6), (5, 7), (6, 7)\}$, $Y_2 = \{(a, e), (a, b), (a, c),$ $(a, g), (b, c), (b, d), (b, g), (c, d), (c, f), (d, e), (d, f), (e, f), (e, g), (f, g)\}$.

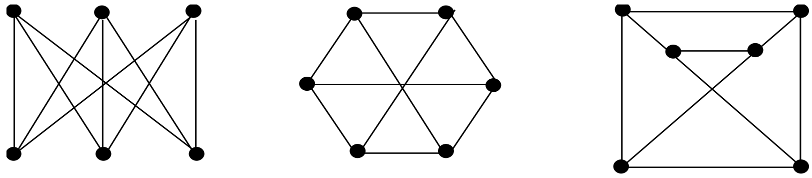
Розв'язок. Нумеруємо вершини графа $G_1(X_1, Y_1)$ довільно. Після цього нумеруємо вершини графа $G_2(X_2, Y_2)$, домагаючись того, щоб вершини з номерами i та j у ньому були суміжні тоді й тільки тоді, коли суміжні вершини з такими ж самими номерами в графа $G_1(X_1, Y_1)$.

Вправи для самостійного розв’язання

Завдання 1. Побудувати всі графи на п’яти, чотирьох і трьох вершинах.

Завдання 2. Побудувати повний граф з чотирма вершинами. Знайти всі його підграфи. Знайти його частини, що містять 5, 4, 3, 2, 1 ребро. Які знайдені частини є підграфами, а які ні?

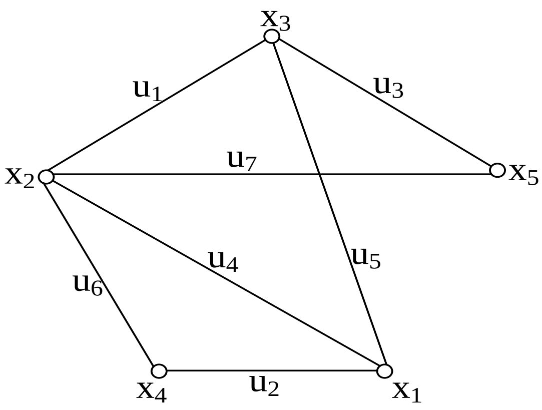
Завдання 3. Побудувати доповнення до графів, які зображені на рис 1, визначити степені вершин графів та їх доповнень.



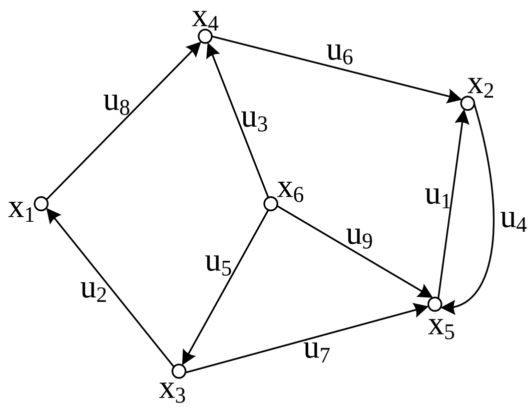
а *б* *в*

Рисунок 1

Завдання 4. Для графів, які зображені на рис. 2, визначити степені вершин. Для орієнтованого графа, який зображений на рис. 2 б), для кожної вершини визначити півстепені «виходу і заходу» (додатний степінь і від'ємний степінь).



а)



б)

Рисунок 2

Завдання 5. Побудувати матриці суміжності та інциденцій графа $G(X,Y)$, де $X=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $Y=\{(1,2),(1,6),(1,5),(2,3),(2,7),(3,4),$ $(3,8),(4,5),(4,9),(5,10),(6,7),(6,10),(7,9),(8,9),(8,10)\}$.

Побудувати доповнення цих графів та їхніх матриць суміжності та інциденцій.

Завдання 6. Для графів, які зображені на рис. 2, скласти матриці суміжності та інциденцій. Використовуючи ці матриці, підрахувати степені вершин графів, півстепені «виходу і заходу» для вершин орієнтованого графа.

Завдання 7. Використовуючи матриці суміжності графів G_a і G_b, побудувати наочне зображення (діаграми) графів.

$$A(G_a)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \qquad A(G_b)=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Завдання 8. Довести ізоморфізм графів, які зображені на рис. 1.

Завдання 9. Довести неізоморфність графів $G_1(X_1,Y_1)$ і $G_2(X_2,Y_2)$, де

$X_1=\{1,2,3,4,5,6\}$, $Y_1=\{(1,2),(1,6),(2,3),(2,6),(3,4),(3,5),(4,5),(5,6)\}$,

$X_2=\{a,b,c,d,e,f\}$, $Y_2=\{(a,b),(a,f),(b,c),(b,e),(c,d),(c,f),(d,e),(e,f)\}$.

Завдання 10. Яке найменше число вершин треба вилучити, щоб графи, які зображені на рис. 3, стали планарними? Яке найменше число ребер треба вилучити, щоб ці графи стали планарними?

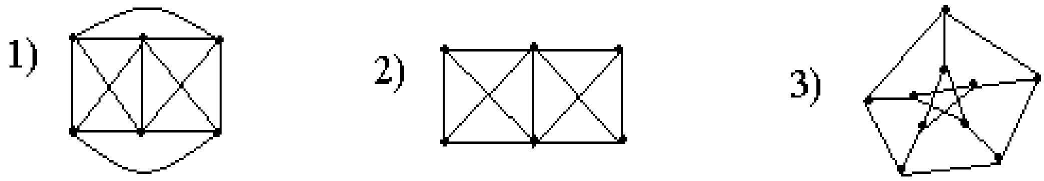


Рисунок 3

Завдання 11. Довести, що граф $G(X,Y)$ непланарний, якщо $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $Y=\{(1, 2), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 7), (3, 4), (3, 8), (4, 5),$ $(4, 10), (5, 9), (6, 8), (6, 9), (7, 9)\}$.

Завдання 12. На рис. 4 наведені графи G_1 і G_2. Знайти $G_1 \cup G_2$ і $G_1 \times G_2$.

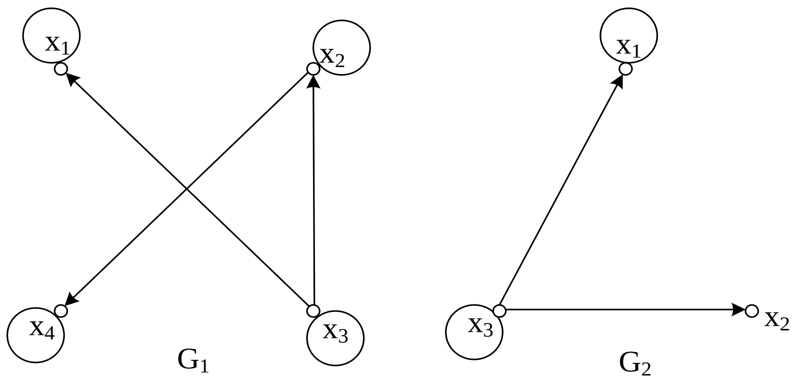
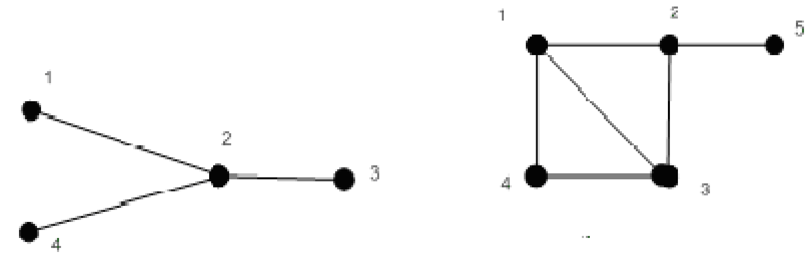


Рисунок 4 – Графи G_1 і G_2, для яких визначається $G_1 \cup G_2$ і $G_1 \times G_2$

Завдання 13. На рис. 5 наведені графи G_1 і G_2. Знайти $G_1 \cup G_2$ і $G_1 \cap G_2$.



G_1 G_2

Рисунок 5 – Графи G_1 і G_2, для яких визначається $G_1 \cup G_2$ і $G_1 \cap G_2$

Практичне заняття 11. Зв'язність. Ейлерові цикли та ланцюги

Приклади аудиторних завдань

Завдання 1. Визначити, чи є для графа G, який представлений на рис. 4.1, відповідний маршрут ланцюгом, простим ланцюгом, циклом, простим циклом, якщо маршрут заданий як: 1) $x_1x_4x_2x_1$; 2) $x_1u_2x_4u_9x_5u_8x_4u_5x_2u_4x_1$; 3) $x_2x_4x_1x_5$; 4) $x_3u_3x_1u_2x_4u_2x_1$; 5) $x_4u_9x_5u_1x_1u_3x_3$.

Розв'язок. Відповідно до визначення ланцюга, простого ланцюг, циклу, простого циклу одержимо: 1) простий цикл (всі вершини й ребра різні); 2) цикл (всі ребра різні, а вершини ні); 3) простий ланцюг; 4) маршрут (є однакові ребра й вершини); 5) простий ланцюг.

Завдання 2. Визначити число компонент зв'язності в графі G, якщо граф задається таким чином (рис. 1)

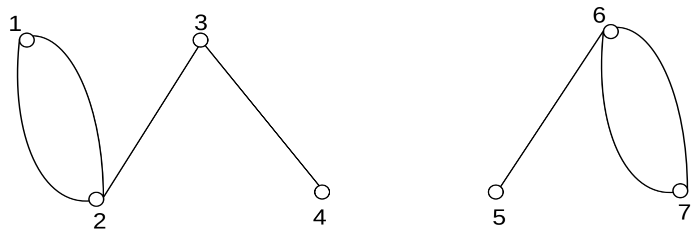


Рисунок 1. – Граф G, для якого визначається число компонент зв'язності

Розв'язок. Граф має дві компоненти зв'язності, в першу входять вершини $\{1, 2, 3, 4\}$, в другу – $\{5, 6, 7\}$.

Завдання 3. Розкласти орграф G, який представлений на рис. 2, на сильно зв'язані компоненти.

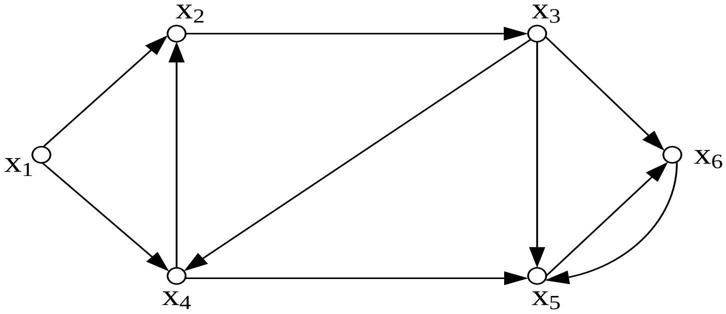


Рисунок 2.

Розв'язок. Граф розкладається на три сильно зв'язані компоненти G_1, G_2, G_3 (рис. 3.)

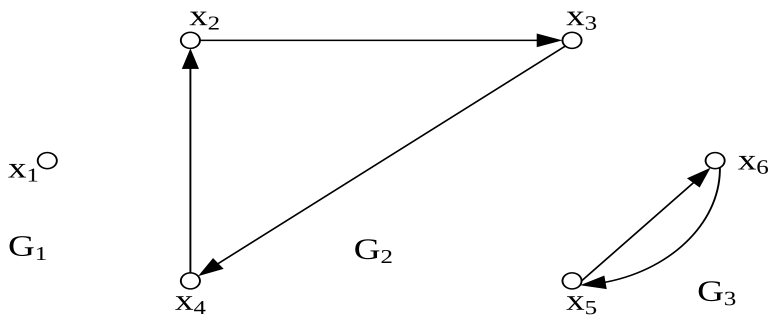


Рисунок 3.

Завдання 4.

Знайти в графі G, який надається на рис. 4, всі точки зчленування і мости.

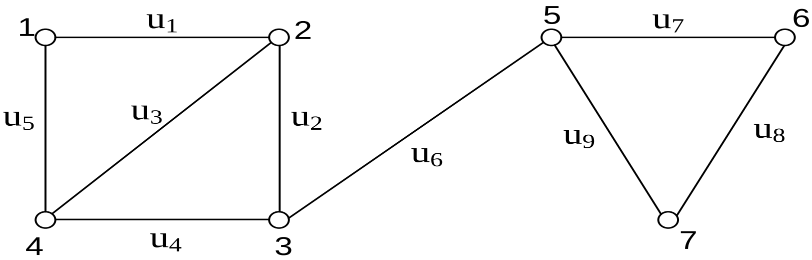


Рисунок 4.

Розв'язок.

Послідовно розглянемо ребра графа, вилучаючи їх з графа. Тільки вилучення ребра u_6 приводить до збільшення числа компонент зв'язності, тому u_6 є мостом. Аналогічно розглядаємо вершини графа і находимо, що вершини 3 і 5 є точками зчленування, тому що вилучення їх з графа приводить до збільшення числа компонент зв'язності.

Завдання 5.

Знайти такі метричні характеристики графа G (рис. 5.): ексцентриситети усіх вершин графа, діаметр графа, радіус графа, периферійні вершини графа, діаметральні ланцюги, центральні вершини графа, центр графа.

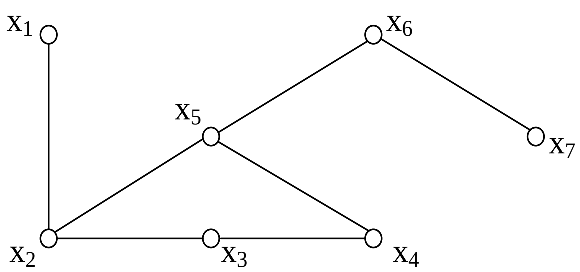


Рисунок 5.

Розв'язок.

Ексцентриситетом $e(x_i)$ вершини x_i є відстань від x_i до найбільш віддаленої від неї вершини, тому $e(x_1) = e(x_2) = e(x_4) = e(x_6) = 3$, $e(x_3) = e(x_7) = 4$, $e(x_5) = 2$. Максимальний з усіх ексцентриситетів є діаметром графа, тобто $d(G) = \max e(x_i) = 4$. Найменший з ексцентриситетів є радіусом графа, тобто $r(G) = \min e(x_i) = 2$. Вершина x_i є периферійною, якщо її ексцентриситет дорівнює діаметру графа, тобто $e(x_i) = d(G)$, тому периферійними вершинами графа G є вершини x_3 і x_7. Простий ланцюг, відстань між кінцями якої дорівнює $d(G)$, називається діаметральні ланцюги ом, тому діаметральними ланцюгами графа G є такі ланцюги: $x_3 - x_2 - x_5 - x_6 - x_7$ і $x_3 - x_4 - x_5 - x_6 - x_7$. Вершина x_i називається центральною вершиною графа, якщо на ній досягається мінімум ексцентриситетів, тобто $e(x_i) = r(G)$, тому центральною вершиною графа G є вершина x_5. Множина усіх центральних вершин графа є центром графа, тому центром графа G є $\{x_5\}$.

Завдання 6.

Визначити, чи є граф G, який зображений на рис. 6, ейлеревим.

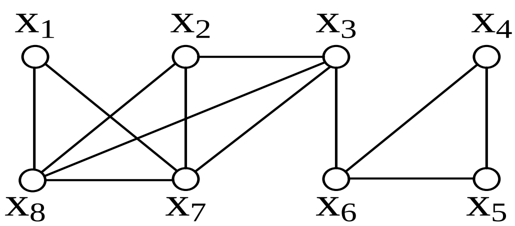


Рисунок 6.

Розв'язок.

Використаємо теорему Ейлера: граф є ейлеревим (містить ейлерів цикл) тоді і тільки тоді, коли він зв'язний і степені всіх його вершин – парні.

Граф G є зв'язним. Степені його вершин такі: $\delta(x_1) = \delta(x_4) = \delta(x_5) = 2$, $\delta(x_2) = \delta(x_6) = 3$, $\delta(x_3) = \delta(x_7) = \delta(x_8) = 4$. Граф не є ейлеревим, тому що не усі степені вершин є парними.

Завдання 7.

Чи має граф, який зображений на рис. 7 власний ейлерів шлях?

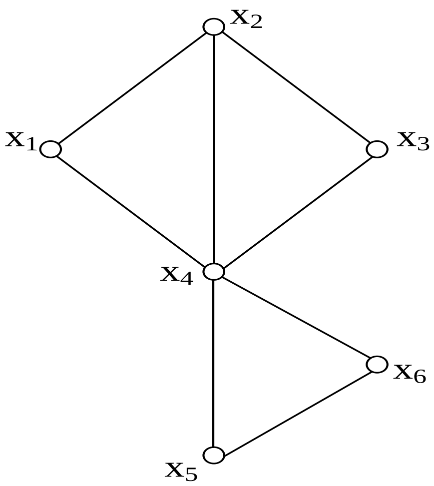


Рисунок 7.

Розв'язок.

Використаємо наступну теорему: граф (мультограф або псевдограф) має власний ейлерів шлях тоді й тільки тоді, коли він зв'язний і рівно дві його вершини мають непарний степінь. Граф, зображений на рис. 4.18, зв'язний, має власний ейлерів шлях, тому що рівно дві його вершини (x_2 і x_4) мають непарну степінь, тобто $\delta(x_2) = \delta(x_4) = 3$.

Завдання 8.

Чи має орієнтований граф, який зображений на рис. 8, ейлерів цикл?

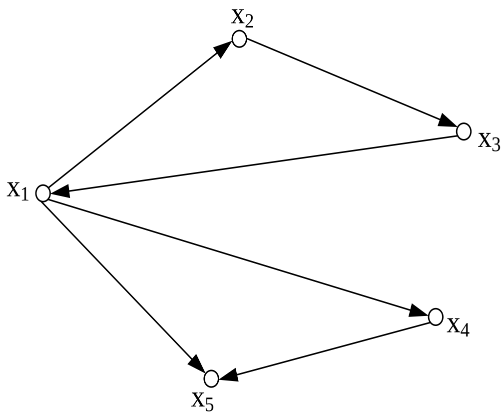


Рисунок 8.

Розв'язок.

Використаємо наступну теорему: орієнтований граф має ейлерів цикл тоді й тільки тоді, коли він зв'язний, і півстепені виходу та заходу у вершині x_i рівні. Орієнтований граф, який зображений на рис. 8, не містить ейлерів цикл, тому що півстепені виходу та заходу у вершинах x_1 і x_5 не дорівнюють відповідно один одному.

Завдання 9.

Найдіть гамільтонів цикл, якщо він існує, у графі G, який зображений на рис. 9.

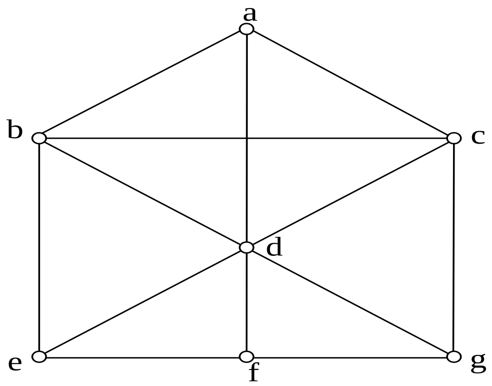


Рисунок 9.

Розв'язок.

Гамільтонів цикл для графа G буде таким $acgfedba$.

Вправи для самостійного розв'язання

Завдання 1. Визначити, чи є для графа $G(X,U)$, який надається на рис.1, маршрут ланцюгом, циклом, простим циклом, якщо маршрут задається як: 1) $x_1x_4x_2$; 2) $x_4u_9x_5u_8x_4u_5x_2u_4x_1$; 3) $x_2u_6x_3u_7x_2$; 4) $x_1u_2x_4u_9x_5u_9x_4$.

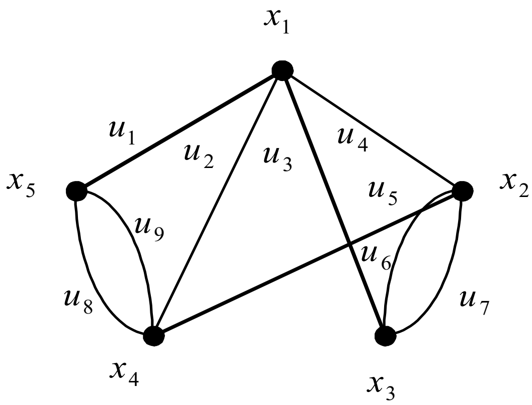


Рисунок 1. – Граф $G(X,U)$

Завдання 2. Який з наведених на рис. 2 орієнтованих графів є зв'язним? Який з графів є сильно зв'язним?

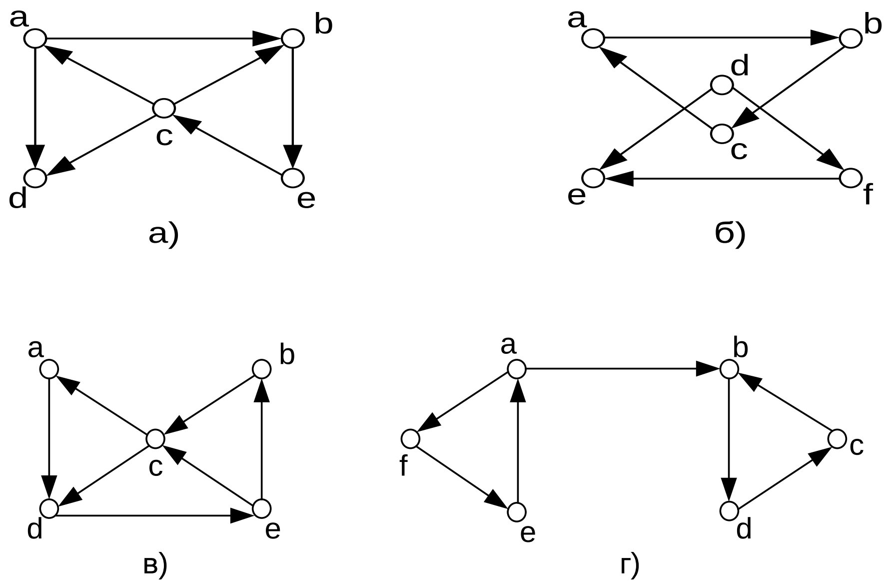
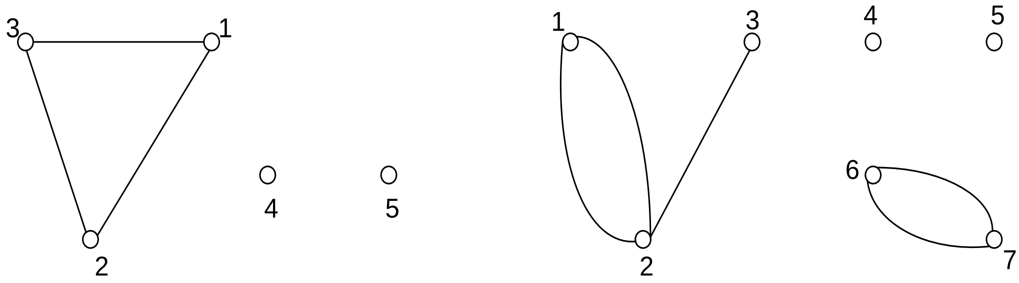


Рисунок 2

Завдання 3. Визначити число компонент зв'язності в графах G_1 та G_2 (рис. 3), якщо ці графи задаються таким чином



а) граф G_1 б) граф G_2

Рисунок 3

Завдання 4. Визначити компоненти зв'язності в графі G (рис. 4) і знайти маршрути довжини три (три дуги), які виходять з вершини x_1.

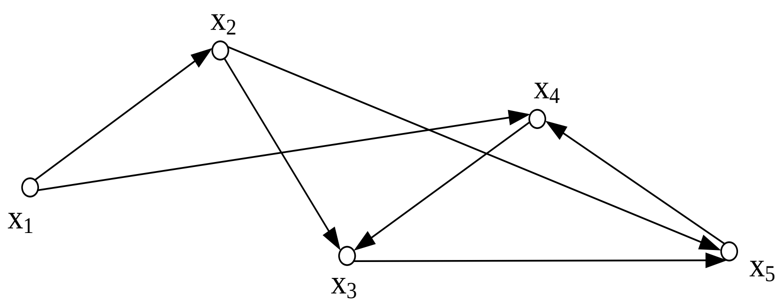


Рисунок 4

Завдання 5. Знайти в графі G (рис. 5) всі точки зчленування і мости.

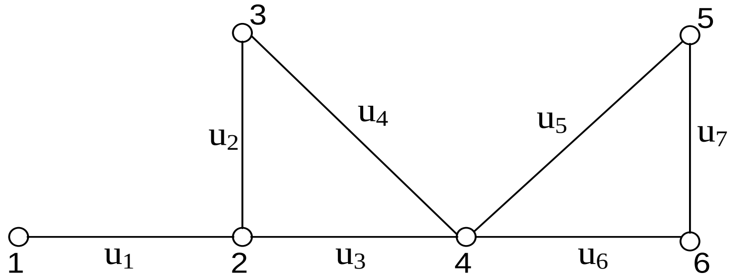


Рисунок 5

Завдання 6. Знайти такі метричні характеристики графа G (рис. 6): ексцентриситети усіх вершин графа, діаметр графа, радіус графа, периферійні вершини графа, діаметральні ланцюги, центральні вершини графа, центр графа.

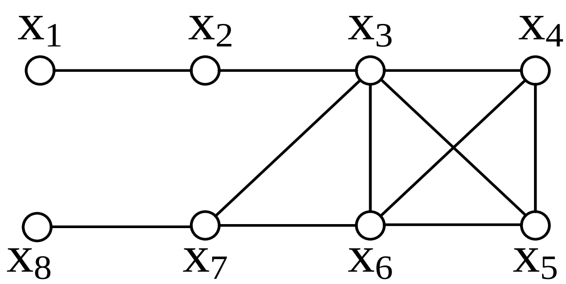


Рисунок 6

Завдання 7. Знайти для графа G, який зображений на рис. 7, центр, радіус, діаметр, периферійні точки.

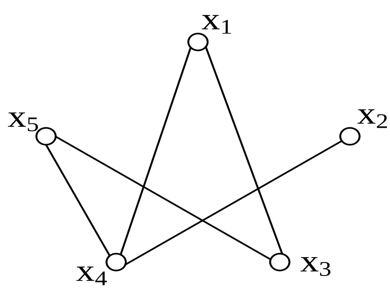


Рисунок 7

Завдання 8. Визначити, чи є графи G_1 і G_2, які зображені на рис. 8, ейлеревими (мають ейлерів цикл).

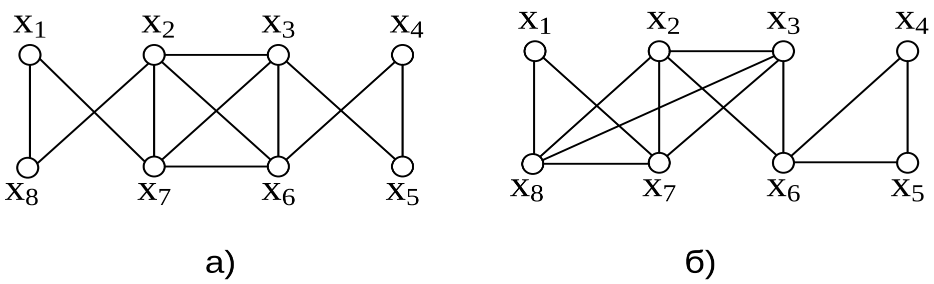


Рисунок 8

Завдання 9. Серед графів, які зображені на рис. 9, знайдіть ті, які мають власний ейлерів шлях?

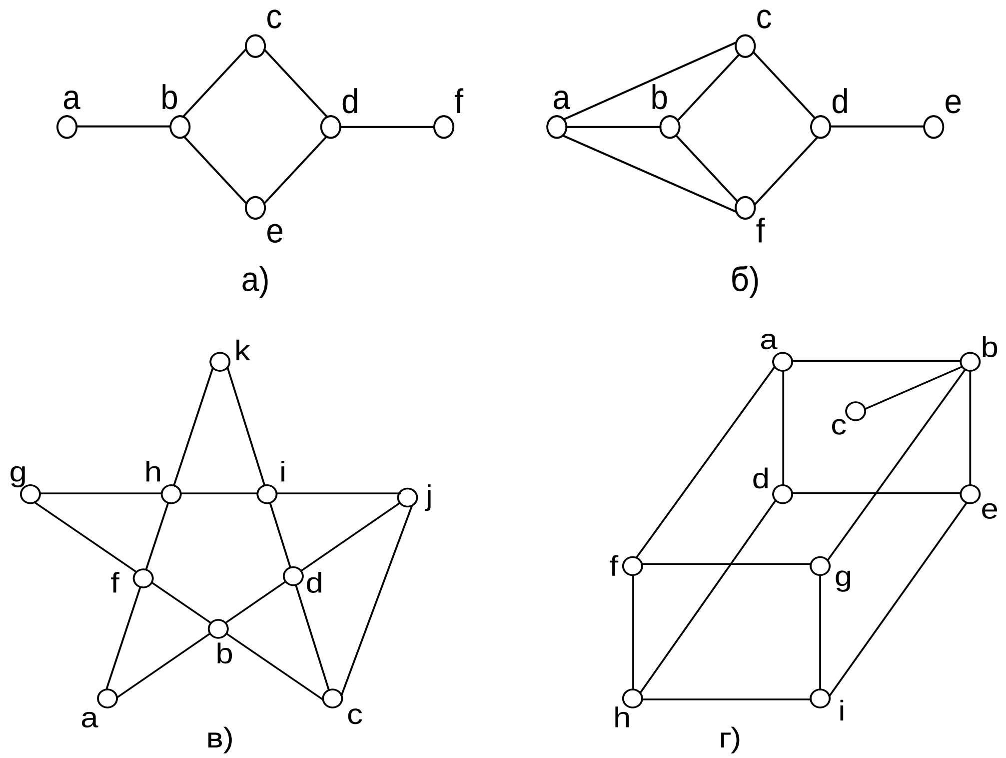


Рисунок 9

Завдання 10.

Поясніть, які з орієнтованих графів, що зображені на рис. 10, мають ейлерів цикл?

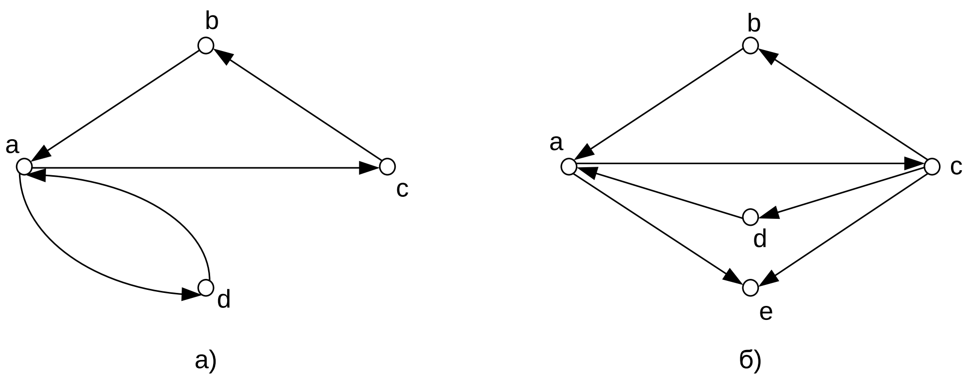


Рисунок 10

Завдання 11.

Найдіть гамільтонів цикл, якщо він існує, для кожного з графів, які зображені на рис. 11.

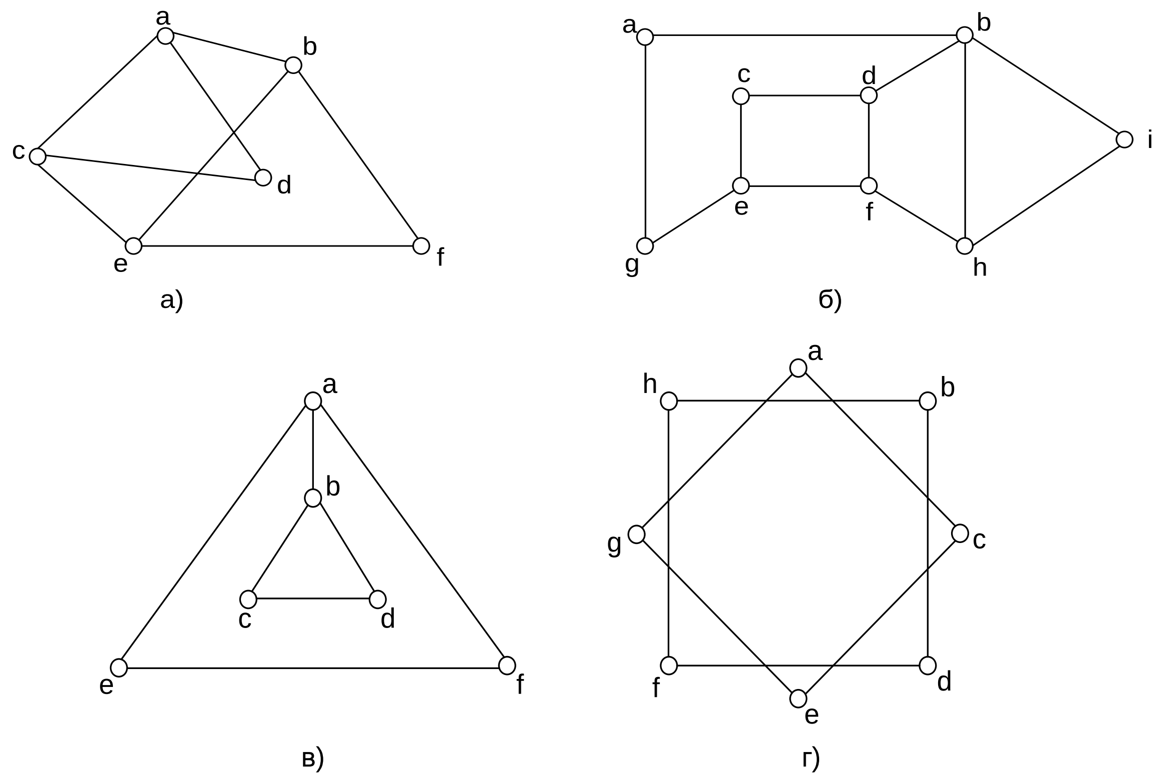


Рисунок 11

Завдання 12.

Нарисуйте наступні графи: а) K_6; б) $K_{1,3}$; в) $K_{1,4}$; г) $K_{3,4}$.

Практичне заняття 12. Пошук оптимальних маршрутів у графі. Дерева. Ліс

Приклади аудиторних завдань

Завдання 1. Чому дорівнює кількість позначених неорієнтованих простих графів з $n=3$ вершинами і $m=2$ ребрами? Нарисувати усі ці графи.

Розв'язок. Кількість $G_{n;\,m}=G_{3;\,2}$ позначених неорієнтованих простих графів з $n=3$ вершинами і $m=2$ ребрами дорівнює числу сполучень з множини різних неорієнтованих пар вершин $\{(\overline{x_i, x_j})\}$ за числом ребер $m=2$. Оскільки число вказаних пар вершин дорівнює числу сполучень C_n^2, то $G_{n;\,m}=C_{C_n^2}^{m}=C_{C_3^2}^{2}$, де $C_n^2=C_3^2=\dfrac{n!}{(n-2)!\,2!}=\dfrac{n\,(n-1)}{2}=\dfrac{3\,(3-1)}{2}=\dfrac{3\cdot 2}{2}=3$.

Тому $G_{n;\,m}=G_{3;\,2}=C_{C_n^2}^{m}=C_{C_3^2}^{2}=C_3^2=3$. Ці три графа представлено на рис. 1.

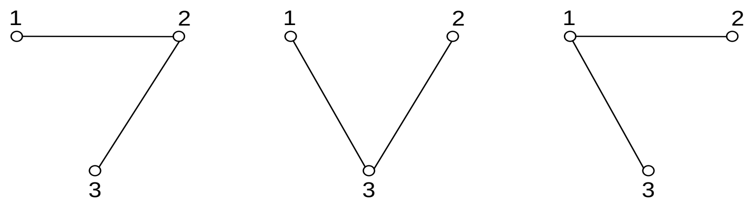


Рисунок 1. – Позначені неорієнтовані прості графи з $n=3$ вершинами і $m=2$ ребрами

Завдання 2. Чому дорівнює кількість усіх позначених неорієнтованих простих графів з $n=3$ вершинами? Нарисувати усі ці графи.

Розв'язок. Кількість $G_{n;\,m}$ позначених неорієнтованих простих графів з n вершинами і m ребрами дорівнює $G_{n;\,m}=C_{C_n^2}^{m}=C_s^m$, де $s=C_n^2=\dfrac{n\,(n-1)}{2}$. Сумуючи числа $G_{n;\,m}$ за всіма можливими кількостями ребер $m=1,2,\ldots,\dfrac{n(n-2)}{2}$ від випадку безреберного графа до випадку повного графа з n вершинами, одержуємо число G_n всіх позначених графів з n вершинами $G_n=\sum\limits_{m=0}^{s}C_s^m=2^s$. Якщо $n=3$, то $s=C_n^2=\dfrac{n\,(n-1)}{2}=\dfrac{3\,(3-1)}{2}=\dfrac{3\cdot 2}{2}=3$ і $G_3=2^s=2^3=8$. Усі позначені неорієнтовані прості графи з $n=3$ вершинами наведено на рис. 2.

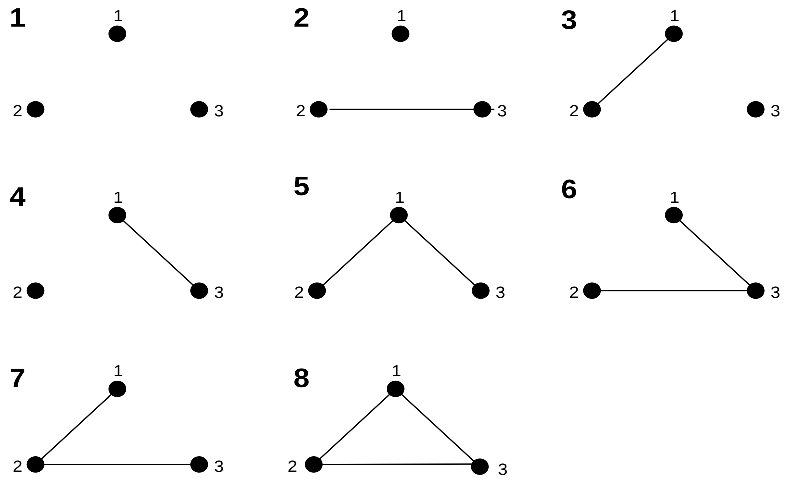


Рисунок 2. – Позначені неорієнтовані прості графи з $n=3$ вершинами

Завдання 3. Знайти на рис. 2, де представлені неорієнтовані прості графи з $n=3$ вершинами, попарно неізоморфні графи без позначок, нарисувати їх, підрахувати кількість g_3 таких графів.

Розв'язок. Число попарно неізоморфних графів без позначок з $n=3$ вершинами дорівнює g_3=4. Ці графи наведено на рис. 3.

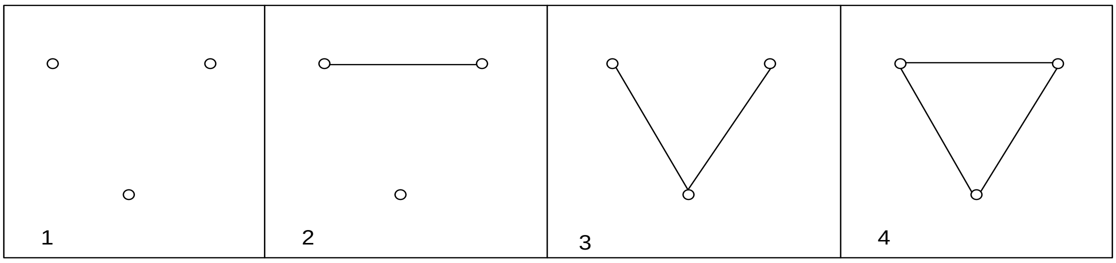


Рисунок 3. – Неізоморфні неорієнтовані прості графи з $n=3$ вершинами

Завдання 4. Чому дорівнює кількість усіх позначених неорієнтованих дерев з $n=4$ вершинами? Нарисувати усі ці дерева.

Розв'язок. За формулою Келі число позначених дерев з n вершинами дорівнює $\tau_n = n^{n-2}$, тому кількість усіх позначених неорієнтованих дерев з $n=4$ вершинами буде $\tau_4 = n^{n-2} = 4^{4-2} = 4^2 = 16$.

Усі ці позначені дерева наведено на рис. 4.

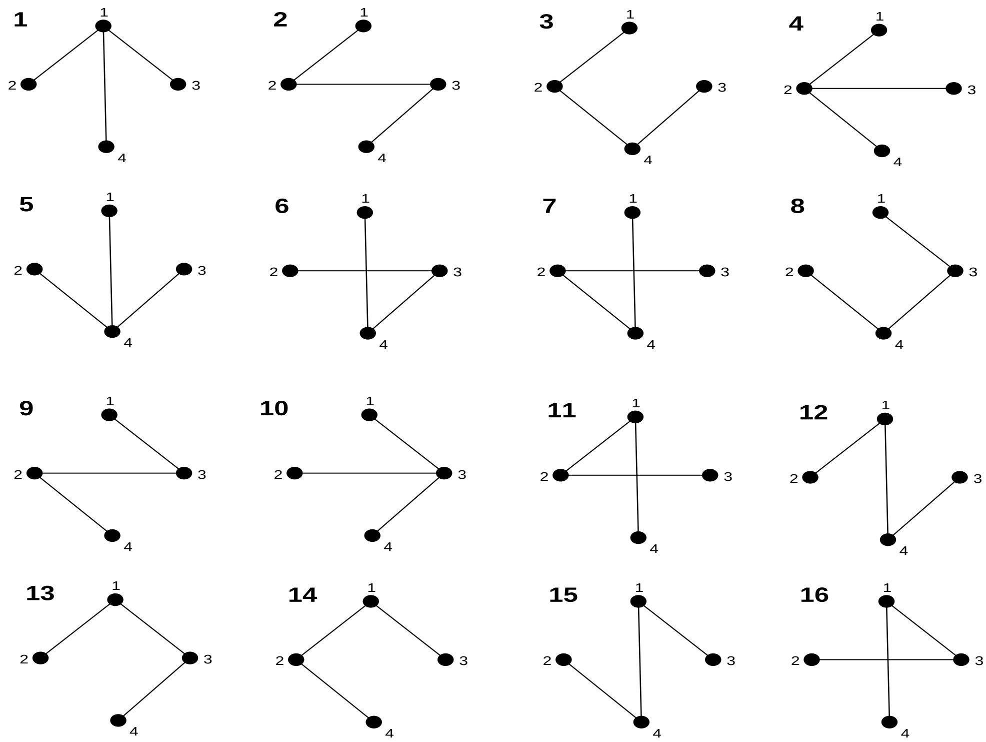


Рисунок 4. – Позначені неорієнтовані дерева з $n = 4$ вершинами

Завдання 5. На рис. 5, де представлені неорієнтовані прості графи з $n=3$ вершинами, знайти неізоморфні дерева без позначок, нарисувати їх, підрахувати кількість t_3 таких дерев.

Розв'язок. Число t_3 звичайних (неізоморфних) дерев дорівнює 1. Це дерево наведено на рис. 5.

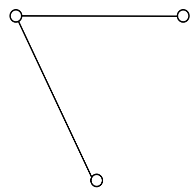


Рисунок 5. – Дерево з $n=3$ вершинами

Завдання 6. Чому дорівнює кількість T_n кореневих дерев з $n=4$ вершинами? Нарисувати усі ці дерева.

Розв'язок.

Усі кореневі дерева з числом вершин $n=4$ представлені на рис. 6

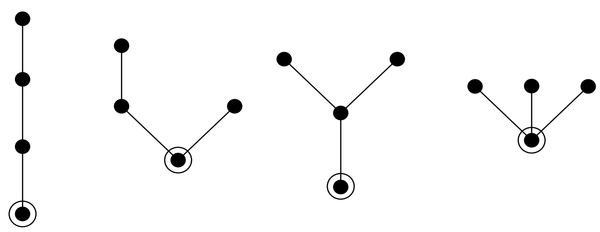


Рисунок 6. – Кореневі дерева з $n=4$ вершинами

Вправи для самостійного розв'язання

Завдання 1. Підрахувати кількість позначених неорієнтованих простих графів з $n=8$ вершинами і $m=5$ ребрами та нарисувати декілька з таких графів.

Завдання 2. Підрахувати кількість усіх позначених неорієнтованих простих графів з $n=4$ вершинами та нарисувати ці графи.

Завдання 3. Підрахувати кількість усіх позначених неорієнтованих простих графів з $n=5$ вершинами та нарисувати тільки ті графи, у яких кількість ребер дорівнює чотирьом.

Завдання 4. Записати простий дріб такого виду $\frac{G_4}{g_4}$, де G_4 – кількість усіх позначених неорієнтованих простих графів з чотирма вершинами, g_4 – кількість неорієнтованих простих неізоморфних графів з чотирма вершинами без позначок. Нарисувати усі неорієнтовані прості неізоморфні графи з чотирма вершинами без позначок.

Завдання 5. Знайти кількість усіх позначених неорієнтованих дерев з $n=5$ вершинами? Нарисувати 10 таких дерев.

Завдання 6. Знайти кількість простих неорієнтованих неізоморфних дерев з $n=5$ вершинами. Нарисувати такі дерева.

Завдання 7. Знайти кількість T_n кореневих дерев з $n=5$ вершинами. Нарисувати такі дерева.

Завдання 8. Визначити кількість остовів (каркасів, кістяків) графа G, який зображений на рис. 1. Наведіть зображення п’яти остовів.

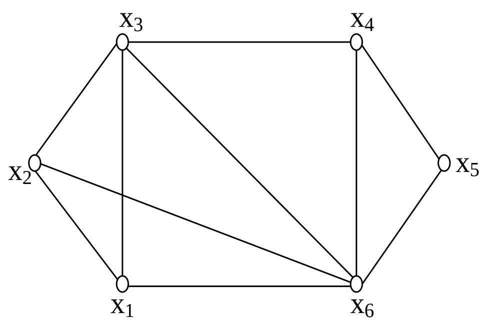


Рисунок 1. – Граф G, для якого визначається кількість остовів

Завдання 9. Скільки остовних дерев є у графів Понтрягіна-Куратовського ($K_{3,3}$ і K_5)?

Завдання 10. Скільки остовних дерев має граф K_4? Скільки остовних дерев має граф $K_{n,n}$?