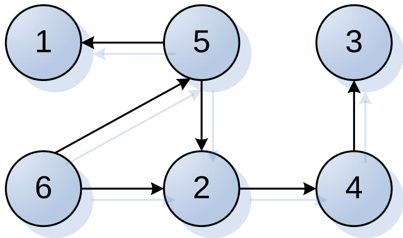
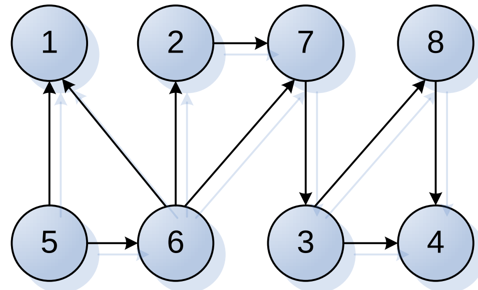
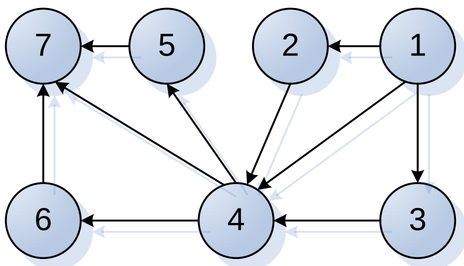
д)



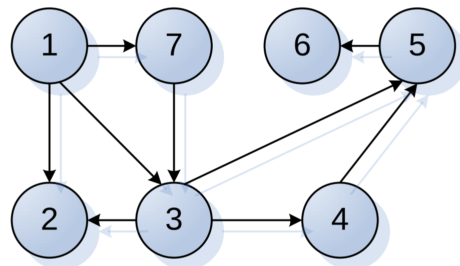
е)



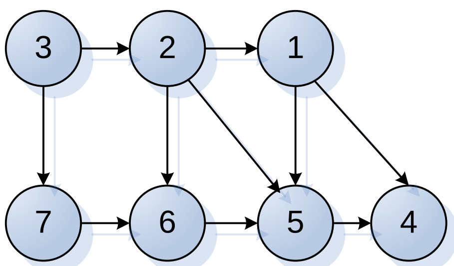
є)



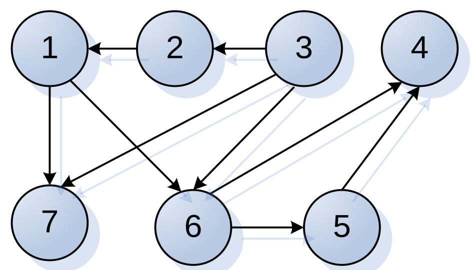
ж)



з)



і)



1.8. Геометричні алгоритми

1.8.1. Короткі теоретичні відомості

Алгоритми для розв'язання геометричних задач розглядаються в обчислювальній геометрії [3, 13].

Основна задача обчислювальної геометрії полягає в розробці алгоритмів роботи з геометричними об'єктами, на площині найпростішими з них є точки і відрізки. Точка на декартовій площині задається двома числами: її абсцисою та ординатою. Відрізок з кінцями в точках p_1 і p_2 визначається як множина точок, що подаються у вигляді $p = ap_1 + \ (1 - a)p_2$, де $0 \leq a \leq 1$.

Важливу роль у багатьох геометричних алгоритмах відіграє визначення напрямку повороту одного вектора до другого. Для розв'язання даної задачі часто використовують поняття векторного (чи, як його називають ще, псевдоскалярного) добутку.

Для обчислення векторного добутку двох векторів $\overrightarrow{p_1}$ і $\overrightarrow{p_2}$, що лежать в одній площині (під яким розуміють площу паралелограма, утвореного точками

$(0{,}0)$, p_1, p_2 $(p_1 + p_2)$), в роботі [1] пропонується визначення його як визначника матриці:

$$\overrightarrow{p_1} \times \overrightarrow{p_2} = \det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1 = -\overrightarrow{p_2} \times \overrightarrow{p_1}.$$

Якщо порівняти дане визначення векторного добутку з тим, яке дається в курсах аналітичної геометрії, то відповідь на запитання про напрямок повороту є очевидною:

1) якщо $\overrightarrow{p_1} \times \overrightarrow{p_2} > 0$, то від $\overrightarrow{p_2}$ до $\overrightarrow{p_1}$ необхідно повертати за годинниковою стрілкою;

2) якщо $\overrightarrow{p_1} \times \overrightarrow{p_2} < 0$, то від $\overrightarrow{p_2}$ до $\overrightarrow{p_1}$ потрібно повертати проти годинникової стрілки;

3) якщо векторний добуток рівний нулю, то вектори лежать на одній прямій, тобто вони або направлені в один, або в протилежний бік.

Зазначимо, що при виборі напрямку приймається найкоротший поворот.

Нехай задані два вектори $\overrightarrow{p_1} = (6{,}2)$ і $\overrightarrow{p_2} = (3{,}4)$. Обчислимо їх векторний добуток:

$$\overrightarrow{p_1} \times \overrightarrow{p_2} = \det\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 6 \times 4 - 3 \times 2 = 18.$$

Оскільки векторний добуток додатній, то від $\overrightarrow{p_2}$ до $\overrightarrow{p_1}$ необхідно повертати за годинниковою стрілкою (рис. 1.114, *а*)).

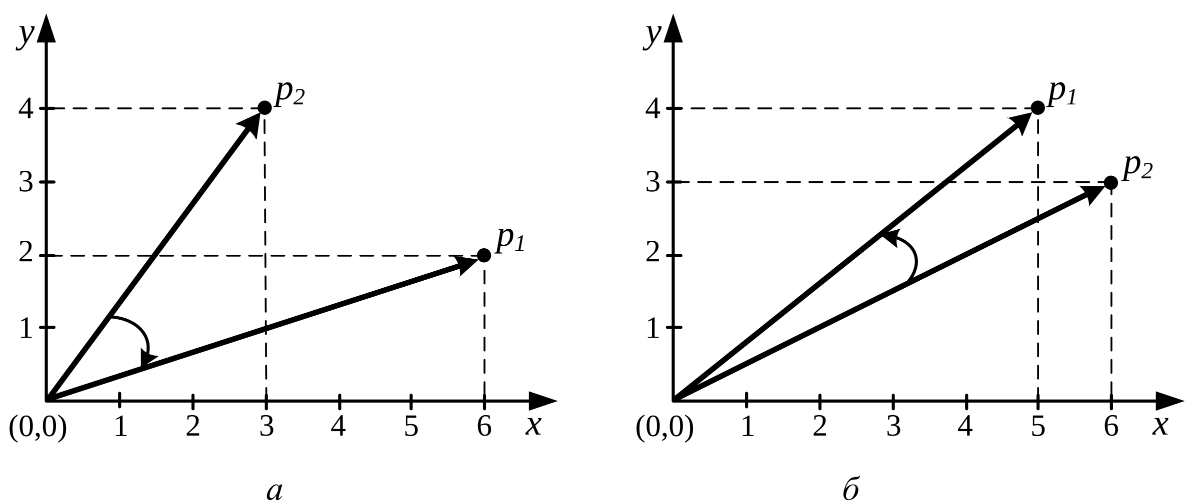


Рисунок 1.114 – Визначення повороту вектора $\overrightarrow{p_2}$ до $\overrightarrow{p_1}$:

а – за годинниковою стрілкою; *б* – проти годинникової стрілки

Нехай задані два вектори $\overrightarrow{p_1} = (5,4)$ і $\overrightarrow{p_2} = (6,3)$. Обчислимо їх векторний добуток:

$$\overrightarrow{p_1} \times \overrightarrow{p_2} = \det\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = 5 \times 3 - 6 \times 4 = -9$$

Оскільки векторний добуток, то від $\overrightarrow{p_2}$ до $\overrightarrow{p_1}$ необхідно повертати проти годинникової стрілки (рис. 1.114, *б*)).

Задача побудови опуклих оболонок – одна з центральних задач обчислювальної геометрії, що визначається не лише величезною кількістю її додатків (наприклад, у математичній статистиці, розробці ігор, обробці зображень), але і її корисністю для алгоритмів розв’язання інших задач, які використовують побудову опуклої оболонки як елементарну операцію.

Поняття опуклої оболонки визначається таким чином. Нехай задана деяка множина точок на площині. Опуклою оболонкою називається найменший опуклий багатокутник, що містить дані точки (рис. 1.115).

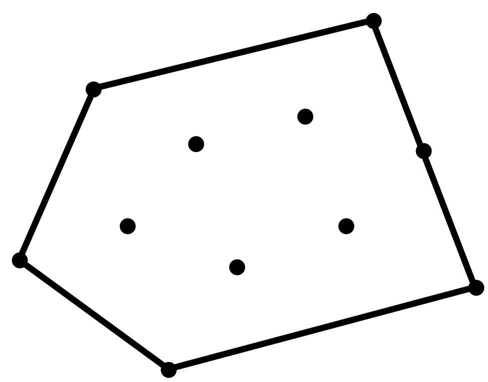


Рисунок 1.115 – Опукла оболонка точок

Відома велика кількість алгоритмів для розв’язання даної задачі, наприклад:

- алгоритм типу «Розділяй і володарюй»;
- алгоритм «швидкої побудови»;
- алгоритм Чана;
- алгоритм обходу Джарвіса;
- алгоритм обходу Грехема та інші.

Розглянемо детальніше алгоритм обходу Джарвіса [14] і алгоритм Грехема [15].

Алгоритм Джарвіса

Задана множина N точок на площині.

Побудова опуклої оболонки даної множини починається з точки, яка гарантовано буде входити до опуклої оболонки. Очевидно, що сама ліва нижня точка підходить під цю умову, позначимо її p_0.

Далі знаходиться наступна точка p_i (де i – крок алгоритму) у випадку обходу проти годинникової стрілки. Вона, очевидно, володіє властивістю, що інші точки лежать зліва від вектора $\overrightarrow{p_{i-1}p_i}$.

Пошук точки, що включається на i-му кроці алгоритму можна здійснити так.

Вибираємо будь-яку точку не з оболонки як претендента на включення, позначимо її p_{best}. Потім послідовно порівнюємо точку p_{best} з точками не з оболонки (а також з початковою точкою оболонки p_0, оскільки нам необхідно в кінці побудови оболонки «зімкнути» її, тобто із поточної точки знову прийти в точку p_0). Для порівняння точок будемо використовувати знак векторного добутку $(p_{best} - p_{i-1}) \times (q_j - p_{i-1})$.

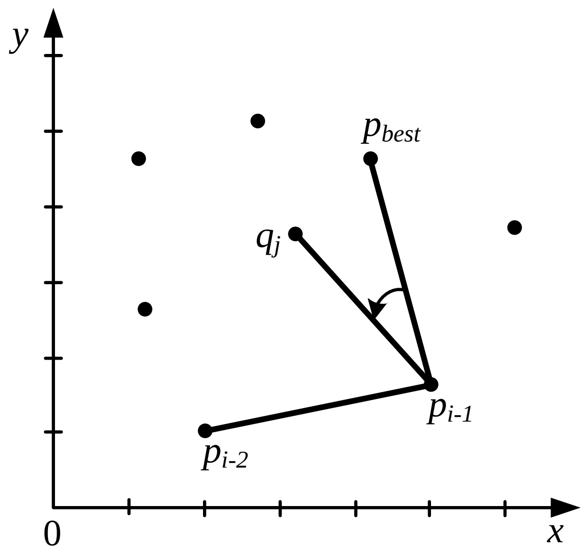
Якщо для одної із точок, що розглядаються, вказаний вираз менший від нуля, то вважаємо її претендентом на включення і продовжуємо перевірку інших точок. Якщо ж значення векторного добутку рівне нулю, то вибираємо ту точку, яка розташована далі від точки p_{i-1}.

На рис. 1.116 показані два випадки, які можуть бути отримані в результаті порівняння точок p_{best} і q_j.

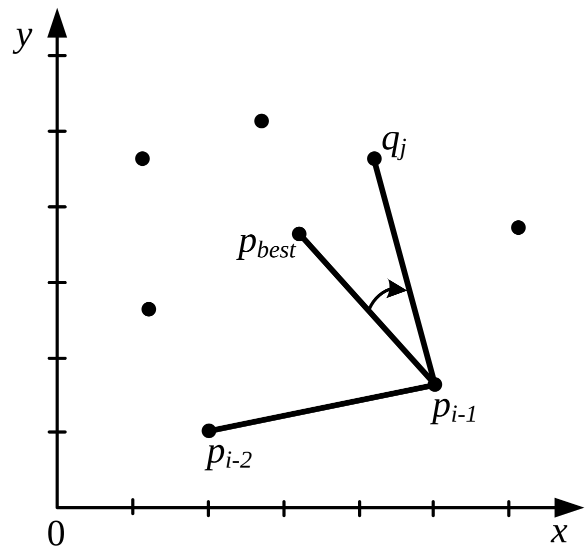
Точки p_{i-2} і p_{i-1} на рис. 116 позначають точки, що належать до опуклої оболонки, знайдені на двох попередніх кроках алгоритму (очевидно, що для кроку 1 точка p_{i-2} на рис. 116 буде відсутня).

Перший випадок (рис. 1.116, *а*) відповідає додатному значенню вказаного вище векторного добутку. Як це можна побачити на рис. 116, в такому випадку необхідно залишити точку p_{best} як претендента на включення до опуклої оболонки.

Другий випадок (рис. 1.116, *б*) відповідає від'ємному значенню векторного добутку, тобто поворот від точки p_{best} до точки q_j відбувається за годинниковою стрілкою, значить, як претендента на включення до опуклої оболонки необхідно розглянути точку q_j, тобто замінити p_{best} точкою q_j.



а



б

Рисунок 1.116 – Порівняння точок p_{best} і q_j на i-му кроці алгоритму:
а – точка p_{best} залишається; *б* – точка p_{best} замінюється на q_j

Якщо ж значення векторного добутку дорівнює нулю, то точки p_{best}, q_j і p_{i-1} лежать на одній прямій. Тоді як кандидата на включення до опуклої оболонки необхідно з точок p_{best} і q_j вибрати ту, яка розташована далі від точки p_{i-1}.

Продовжуючи дану процедуру, на одному з кроків повернемося до точки p_0. Це буде означати, що опукла оболонка побудована.

Алгоритм обходу Грехема був описаний ним в одній із його перших робіт [15], присвяченій питанню розробки ефективних геометричних алгоритмів.

Алгоритм починає свою роботу з находження початкової точки p_0 із заданої множини точок N (не меншої трьох), яка гарантовано є вершиною опуклої оболонки. За таку береться сама ліва із самих нижніх точок множини N.

На *етапі попереднього сортування* всі точки вихідної множини (окрім p_0) сортуються за зростанням полярного кута, утвореного кожною поточною точкою q_j, відносно точки p_0. Якщо дві точки мають однаковий полярний кут, то залишаємо для подальшого розгляду ту точку, відстань від якої до точки p_0 більша, оскільки точка з меншою відстанню до p_0 заздалегідь не потрапляє до оболонки. Відсортовані точки записуються до стека. Зазначимо, що таке сортування можна здійснити за допомогою векторного добутку.

На *етапі побудови опуклої оболонки* алгоритм виконує покрокову обробку відсортованих точок, формуючи оболонку шляхом видалення тих точок, в яких не здійснюється лівий поворот. Це очевидно, оскільки оболонка будується проти годинникової стрілки, починаючи від p_0, значить, рух здійснюється завжди наліво.

На кожному кроці даного етапу перевіряється взаємне розташування трьох точок (спочатку вибираються p_0 в перші дві точки у відсортованому списку). Перевірка полягає у визначенні, чи утворюють точки, які перевіряються, лівий або правий поворот. Таку перевірку також можна здійснити за допомогою векторного добутку.

Будемо говорити, що три точки p_{i-2}, p_{i-1} і p_i утворюють *лівий поворот*, якщо точка p_i знаходиться зліва від прямої, утвореної вектором, направленим з точки p_{i-2} в p_{i-1}.

Якщо точки утворюють лівий поворот, то алгоритм рухається далі за списком, розглядаючи три послідовні точки, починаючи с p_{i-1}.

Якщо точки не утворюють лівий поворот, то середня з них видаляється із списку, і алгоритм «повертається», розглядаючи три послідовні точки, починаючи з p_{i-2}.

Алгоритм буде закінчено, коли всі точки відсортованого списку будуть оброблені.

1.8.2. Приклади розв'язання задач

Задача

На площині задані 7 точок (рис. 1.117). Необхідно побудувати їх опуклу оболонку.

Розв'язання

Випишемо координати всіх заданих точок:

$$q_1 = (1,8),\ q_2 = (4,6),\ q_3 = (6,2),\ q_4 = (10,12),\ q_5 = (11,10),\ q_6 = (12,4),$$
$$q_7 = (15,9).$$

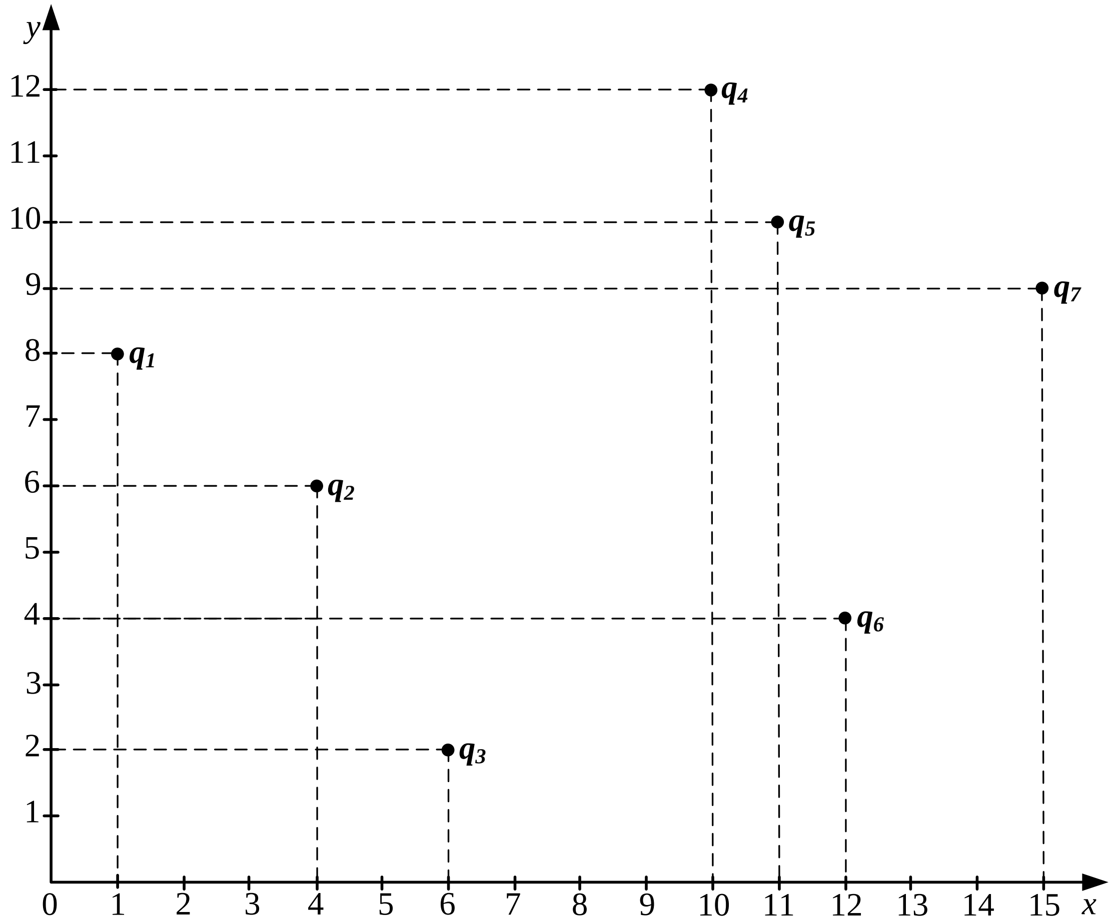


Рисунок 1.117 – Вихідна множина точок

Побудову опуклої оболонки будемо виконувати на основі обходу Джарвіса. Будемо далі позначати як p_i точку, яка на i-му кроці алгоритму включена до опуклої оболонки Q.

Крок 0. Знаходимо початкову точку в обході опуклої оболонки. За таку вибираємо точку, у якої мінімальна ордината, тобто в даному випадку, $q_3 = (6,2)$.

Покладемо $i = 0$, $p_0 = q_3 = (6,2)$.

Включимо точку до оболонки:

$$Q = \{q_3\}.$$

Крок 1. Знаходимо наступну за q_3 точкою на опуклій оболонці.

Покладемо $i=1$.

Як претендента на включення до опуклої оболонки візьмемо першу точку не з оболонки і позначимо її p_{best} (в даному випадку $p_{best}=q_1$).

Оскільки $p_{best}=q_1$, то порівняння починаємо з другої точки.

Покладемо $j=2$. Порівняємо $q_j=q_2$ з p_{best}.

Запишемо векторний добуток $(p_{best}-p_0)\times(q_2-p_0)$:

$$((1,8)-(6,2))\times((4,6)-(6,2))=(-5,6)\times(-2,4).$$

Обчислимо векторний добуток через визначник матриці:

$$\det\begin{pmatrix}-5 & -2\\ 6 & 4\end{pmatrix}=-20+12=-8.$$

Оскільки векторний добуток від'ємний, замінимо p_{best}:

$$p_{best}=q_2=(4,6).$$

Покладемо $j=j+1=3$. Окільки точка q_3 – це єдина точка в оболонці, переходимо до наступної.

Покладемо $j=j+1=4$. Порівняємо $q_j=q_4$ з p_{best}.

Запишемо векторний добуток $(p_{best}-p_0)\times(q_4-p_0)$:

$$((4,6)-(6,2))\times((10,12)-(6,2))=(-2,4)\times(4,10).$$

Обчислимо векторний добуток через визначник матриці:

$$\det\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 4 & 10\end{pmatrix}=-20-16=-36.$$

Оскільки векторний добуток від'ємний, замінимо p_{best}:

$$p_{best}=q_4=(10,12).$$

Покладемо $j=j+1=5$. Порівняємо $q_j=q_5$ з p_{best}.

Запишемо векторний добуток $(p_{best}-p_0)\times(q_5-p_0)$:

$$((10,12)-(6,2))\times((11,10)-(6,2))=(4,10)\times(5,8).$$

Обчислимо векторний добуток через визначник матриці:

$$\det\begin{pmatrix}4 & 5\\ 10 & 8\end{pmatrix}=32-50=-18.$$

Оскільки векторний добуток від'ємний, замінимо p_{best}:

$$p_{best} = q_5 = (11{,}10).$$

Покладемо $j = j+1 = 6$. Порівняємо $q_j = q_6$ з p_{best}.

Запишемо векторний добуток $(p_{best} - p_0) \times (q_6 - p_0)$:

$$((11{,}10) - (6{,}2)) \times ((12{,}4) - (6{,}2)) = (5{,}8) \times (6{,}2).$$

Обчислимо векторний добуток через визначник матриці:

$$\det\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} = 10 - 48 = -38.$$

Оскільки векторний добуток від'ємний, замінимо p_{best}:

$$p_{best} = q_6 = (12{,}4).$$

Покладемо $j = j+1 = 7$. Порівняємо $q_j = q_7$ з p_{best}.

Запишемо векторний добуток $(p_{best} - p_0) \times (q_7 - p_0)$:

$$((12{,}4) - (6{,}2)) \times ((15{,}9) - (6{,}2)) = (6{,}2) \times (9{,}7).$$

Обчислимо векторний добуток через визначник матриці:

$$\det\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = 49 - 18 = 31.$$

Оскільки векторний добуток додатний, то точка p_{best} зберігається.

Усі точки розглянуті, значить, $p_1 = q_6 = (12{,}4)$.

Включимо знайдену точку до оболонки:

$$Q = \{q_3, q_6\}.$$

Крок 2. Знаходимо наступну за q_6 точку на опуклій оболонці.

Покладемо $i = 2$.

Як претендента на включення візьмемо $p_{best} = q_1$. Порівняння починаємо з другої точки.

Покладемо $j = 2$. Порівняємо $q_j = q_2$ з p_{best}.

Запишемо векторний добуток $(p_{best} - p_1) \times (q_2 - p_1)$:

$$((1{,}8) - (12{,}4)) \times ((4{,}6) - (12{,}4)) = (-11{,}4) \times (-8{,}2).$$

Обчислимо векторний добуток через визначник матриці:

$$\det\begin{pmatrix} -11 & -8 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = -22 + 32 = 10.$$

Оскільки векторний добуток додатний, то точка p_{best} зберігається.

Покладемо $j = j+1 = 3$. Порівняємо $q_j = q_3$ з p_{best}.

Запишемо векторний добуток $(p_{best} - p_1) \times (q_3 - p_1)$:

$$((1,8)-(12,4)) \times ((6,2)-(12,4)) = (-11,4) \times (-6,-2).$$

Обчислимо векторний добуток через визначник матриці:

$$\det\begin{pmatrix} -11 & -6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = 22 + 24 = 44.$$

Оскільки векторний добуток додатний, то точка p_{best} зберігається.

Покладемо $j = j+1 = 4$. Порівняємо $q_j = q_4$ з p_{best}.

Запишемо векторний добуток $(p_{best} - p_1) \times (q_4 - p_1)$:

$$((1,8)-(12,4)) \times ((10,12)-(12,4)) = (-11,4) \times (-2,8).$$

Обчислимо векторний добуток через визначник матриці:

$$\det\begin{pmatrix} -11 & -2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = -88 + 8 = -80.$$

Оскільки векторний добуток від’ємний, замінимо p_{best}:

$$p_{best} = q_4 = (10,12).$$

Покладемо $j = j+1 = 5$.

Запишемо векторний добуток $(p_{best} - p_1) \times (q_5 - p_1)$.

$$((10,12)-(12,4)) \times ((11,10)-(12,4)) = (-2,8) \times (-1,6).$$

Обчислимо векторний добуток через визначник матриці:

$$\det\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} = -12 + 8 = -4.$$

Оскільки векторний добуток від’ємний, то точку p_{best} замінимо, точкою q_5:

$$p_{best} = q_5 = (11,10).$$

Покладемо $j = j+1 = 6$. Оскільки точка q_6 уже включена до опуклої оболонки, то переходимо до наступної точки.

Покладемо $j = j+1 = 7$. Порівняємо $q_j = q_7$ з p_{best}.

Запишемо векторний добуток $(p_{best} - p_1) \times (q_7 - p_1)$:

$$((11,10)-(12,4)) \times ((15,9)-(12,4)) = (-1,6) \times (3,5).$$

Обчислимо векторний добуток через визначник матриці:

$$\det\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 6 & 5\end{pmatrix} = -5-18 = -23.$$

Оскільки векторний добуток від’ємний, замінимо p_{best} точкою p_7:

$$p_{best} = q_7 = (15,9).$$

Всі точки розглянуті, значить, $p_2 = q_7 = (15,10)$.

Включимо знайдену точку до оболонки:

$$Q = \{q_3, q_6, q_7\}.$$

Крок 3. Знаходимо наступну після q_7 точку на оболонці.

Покладемо $i = 3$.

Як претендента на включення до опуклої оболонки на 3-му кроці візьмемо першу точку не з оболонки $p_{best} = q_1$.

Покладемо $j = 2$. Порівняємо $q_j = q_2$ з p_{best}.

Запишемо векторний добуток $(p_{best} - p_2)\times(q_2 - p_2)$:

$$((1,8)-(15,9))\times((4,6)-(15,9)) = (-14,-1)\times(-11,-3).$$

Обчислимо векторний добуток через визначник матриці:

$$\det\begin{pmatrix}-14 & -11\\ -1 & -3\end{pmatrix} = 42-11 = 31.$$

Оскільки векторний добуток додатний, то точка p_{best} зберігається.

Покладемо $j = j+1 = 3$.

Запишемо векторний добуток $(p_{best} - p_2)\times(q_3 - p_2)$:

$$((1,8)-(15,9))\times((6,2)-(15,9)) = (-14,-1)\times(-9,-7).$$

Обчислимо векторний добуток через визначник матриці:

$$\det\begin{pmatrix}-14 & -9\\ -1 & -7\end{pmatrix} = 98-9 = 89.$$

Оскільки векторний добуток додатний, то точка p_{best} зберігається.

Покладемо $j = j+1 = 4$.

Запишемо векторний добуток $(p_{best} - p_2)\times(q_4 - p_2)$:

$$((1,8)-(15,9))\times((10,12)-(15,9)) = (-14,-1)\times(-5,3).$$

Обчислимо векторний добуток через визначник матриці:

$$\det\begin{pmatrix}-14 & -5\\ -1 & 3\end{pmatrix} = -42-5 = -47.$$

Оскільки векторний добуток від'ємний, то точку p_{best} замінимо точкою q_4:

$$p_{best} = q_4 = (10,12).$$

Покладемо $j = j + 1 = 5$.

Запишемо векторний добуток $(p_{best} - p_2) \times (q_5 - p_2)$:

$$((10,12) - (15,9)) \times ((11,10) - (15,9)) = (-5,3) \times (-4,1).$$

Обчислимо векторний добуток через визначник матриці:

$$\det\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = -5 + 12 = 7.$$

Оскільки векторний добуток додатний, то точка p_{best} зберігається.

Покладемо $j = j + 1 = 6$. Оскільки точка q_6 вже включена до опуклої оболонки, то переходимо до наступної точки.

Покладемо $j = j + 1 = 7$. Точка q_7 уже включена до опуклої оболонки.

Усі точки розглянуто, значить, $p_3 = q_4 = (10,12)$.

Включимо знайдену точку до оболонки:

$$Q = \{q_3, q_{6,} q_7, q_4\}.$$

Крок 4. Знаходимо наступну після q_4 точку на оболонці.

Покладемо $i = 4$ і $p_{best} = q_1 = (1,8)$.

Починаємо порівняння з другої точки, $j = 2$.

Запишемо векторний добуток $(p_{best} - p_3) \times (q_2 - p_3)$:

$$((1,8) - (10,12)) \times ((4,6) - (10,12)) = (-9,-4) \times (-6,-6).$$

Обчислимо векторний добуток через визначник матриці:

$$\det\begin{pmatrix} -9 & -6 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} = 54 - 24 = 30.$$

Оскільки векторний добуток додатний, то точка p_{best} зберігається.

Покладемо $j = j + 1 = 3$.

Запишемо векторний добуток $(p_{best} - p_3) \times (q_3 - p_3)$:

$$((1,8) - (10,12)) \times ((6,2) - (10,12)) = (-9,-4) \times (-4,-10).$$

Обчислимо векторний добуток через визначник матриці:

$$\det\begin{pmatrix}-9 & -4\\ -4 & -10\end{pmatrix} = 90 - 16 = 74.$$

Оскільки векторний добуток додатний, то точка p_{best} зберігається.

Покладемо $j = j + 1 = 4$. Оскільки точка q_4 уже включена до опуклої оболонки, то переходимо до наступної точки.

Покладемо $j = j + 1 = 5$.

Запишемо векторний добуток $(p_{best} - p_3) \times (q_5 - p_3)$:

$$((1{,}8) - (10{,}12)) \times ((11{,}10) - (10{,}12)) = (-9{,}-4) \times (1{,}-2).$$

Обчислимо векторний добуток через визначник матриці:

$$\det\begin{pmatrix}-9 & 1\\ -4 & -2\end{pmatrix} = 18 + 4 = 22.$$

Оскільки векторний добуток додатний, то точка p_{best} зберігається.

Покладемо $j = j + 1 = 6$. Оскільки точка q_6 уже включена до опуклої оболонки, то переходимо до наступної точки.

Покладемо $j = j + 1 = 7$. Точка q_7 уже включена до опуклої оболонки.

Усі точки розглянуті, значить, $p_4 = q_1 = (1{,}8)$.

Включимо знайдену точку до оболонки:

$$Q = \{q_3, q_{6,} q_7, q_4, q_1\}.$$

Крок 5. Знаходимо наступну після q_1 точку на оболонці.

Покладемо $i = 5$ і $p_{best} = q_2 = (4{,}6)$.

Порівняємо q_3 з p_{best}.

Запишемо векторний добуток $(p_{best} - p_4) \times (q_3 - p_4)$:

$$((4{,}6) - (1{,}8)) \times ((6{,}2) - (1{,}8)) = (3{,}-2) \times (5{,}-6).$$

Обчислимо векторний добуток через визначник матриці:

$$\det\begin{pmatrix}3 & 5\\ -2 & -6\end{pmatrix} = -18 + 10 = -8.$$

Оскільки векторний добуток від'ємний, то точку p_{best} замінимо точкою q_3:

$$p_{best} = q_3 = (6{,}2).$$

Покладемо $j = j + 1 = 4$. Оскільки q_4 уже включена до опуклої оболонки, то переходимо до наступної точки.

Покладемо $j = j + 1 = 5$.

Запишемо векторний добуток $(p_{best} - p_4) \times (q_5 - p_4)$:

$$((6,2) - (1,8)) \times ((11,10) - (1,8)) = (5,-6) \times (10,2).$$

Обчислимо векторний добуток через визначник матриці:

$$\det\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = 10 + 60 = 70.$$

Оскільки векторний добуток додатний, то точка p_{best} зберігається.

Покладемо $j = j + 1 = 6$. Оскільки точка q_6 уже включена до опуклої оболонки, то переходимо до наступної точки.

Покладемо $j = j + 1 = 7$. Точка q_7 уже включена до опуклої оболонки.

Усі точки розглянуто, а оскільки отримана на даному кроці точка-претендент збігається з початковою точкою q_3, то оболонка повністю побудована:

$$Q = \{q_3, q_{6,} q_7, q_4, q_1\}.$$

На рис. 1.118 показаний результат побудови опуклої оболонки для заданого в даній задачі набору точок.

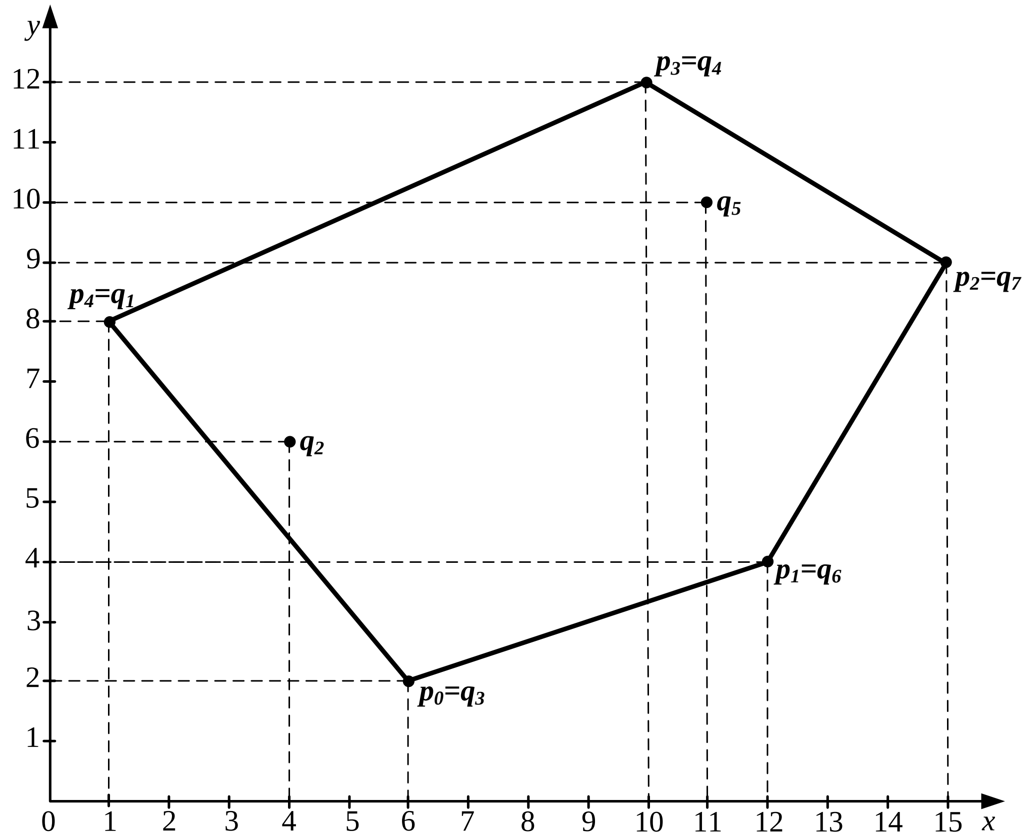


Рисунок 1.118 – Результат побудови опуклої оболонки

Задача 2

На площині задані 5 точок: $p_0 = (1,1)$, $p_1 = (7,2)$, $p_2 = (5,3)$, $p_3 = (6,5)$, $p_4 = (4,6)$ і $p_5 = (3,9)$. Побудувати опуклу оболонку алгоритмом Грехема.

Вказівка. Точки $< p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 >$ відсортовані в порядку зростання полярних кутів відносно стартової точки p_0.

Розв'язання

Оскільки задано початкову точку p_0 і відомий відсортований список точок, то переходимо до другого етапу алгоритму – побудови оболонки. Задану множину точок задачі показано на рис. 1.119.

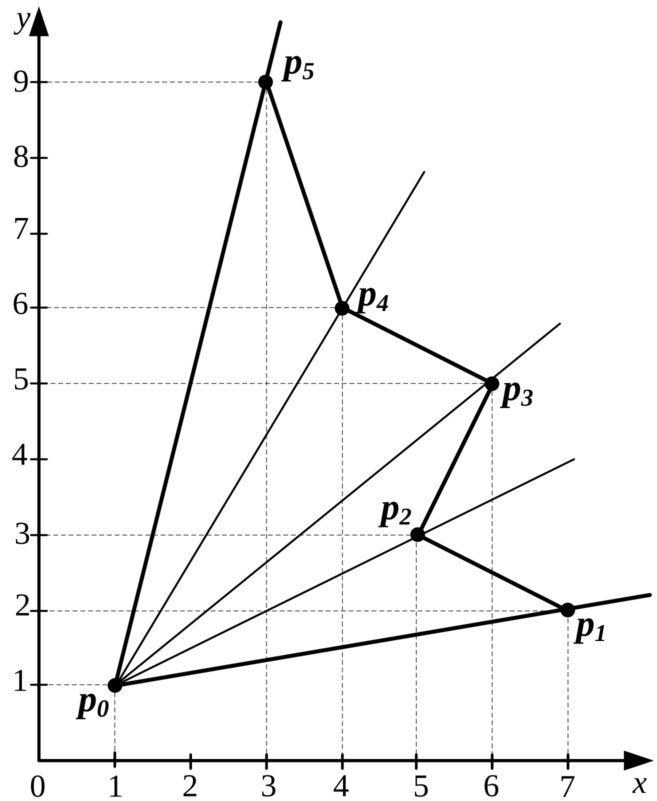


Рисунок 1.119 – Вихідна множина точок

Крок 0. Включаємо до оболонки стартову точку p_0, а також першу точку p_1 з відсортованого списку. Оболонка, що формується:

$$Q = \{p_0, p_1\}.$$

Крок 1. Розглянемо дві точки з оболонки, що формується, p_0, p_1 і наступну нерозглянуту точку з відсортованого списку – p_2. Визначаємо напрям повороту з точки p_1 в точку p_2, для чого записуємо векторний добуток $(p_1 - p_0) \times (p_2 - p_o)$:

$$((7,2)-(1,1)) \times ((5,3)-(1,1)) = (6,1) \times (4,2).$$

Обчислимо векторний добуток через визначник матриці:

$$\det\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 12 - 4 = 8.$$

Оскільки векторний добуток додатний, то поворот лівий, тобто з точки p_1 в точку p_2 необхідно йти наліво відносно прямої, яка визначається точками p_0 і p_1. Значить, включаємо до оболонки точку p_2:

$$Q = \{p_0, p_1, p_2\}.$$

Крок 2. Рухаємося вперед по відсортованому списку, тобто розглядаємо дві останні точки p_1, p_2 з оболонки, яку формуємо, і наступну нерозглянуту точку з відсортованого списку – p_3.

Запишемо векторний добуток $(p_2 - p_1) \times (p_3 - p_1)$:

$$((5,3) - (7,2)) \times ((6,5) - (7,2)) = (-2,1) \times (-1,3).$$

Обчислимо векторний добуток через визначник матриці:

$$\det\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = -6 + 1 = -5.$$

Оскільки векторний добуток від'ємний, то поворот правий, тобто з точки p_2 в точку p_3 необхідно йти направо відносно прямої, що визначається точками p_1 і p_2. Значить, виключаємо з оболонки, що формується, точку p_2 і виключаємо p_3:

$$Q = \{p_0, p_1, p_3\}.$$

Крок 3. Розглянемо дві останні точки p_1, p_3 з оболонки, що формується, і наступну нерозглянуту точку p_4 з відсортованого списку.

Запишемо векторний добуток $(p_3 - p_1) \times (p_4 - p_1)$:

$$((6,5) - (7,2)) \times ((4,6) - (7,2)) = (-1,3) \times (-3,4).$$

Обчислимо векторний добуток через визначник матриці:

$$\det\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -4 + 9 = 5.$$

Оскільки векторний добуток додатний, то поворот лівий, значить, включаємо до оболонки точку p_4:

$$Q = \{p_0, p_1, p_3, p_4\}.$$

Крок 4. Розглянемо дві останні точки p_3, p_4 з оболонки, що формується, і наступну нерозглянуту точку з відсортованого списку – p_5.

Запишемо векторний добуток $(p_4 - p_3) \times (p_5 - p_3)$:

$$((4,6) - (6,5)) \times ((3,9) - (6,5)) = (-2,1) \times (-3,4).$$

Обчислимо векторний добуток через визначник матриці:

$$\det\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = -8 + 3 = -5.$$

Оскільки векторний добуток від'ємний, то поворот правий, отже, виключаємо з оболонки, що формується, точку p_4 і включаємо p_5:

$$Q = \{p_0, p_1, p_3, p_5\}.$$

Усі точки з відсортованого списку розглянуто, значить, оболонку побудовано. Вона включає наступні точки (рис. 1.120), починаючи зі стартової в порядку обходу проти годинникової стрілки:

$$Q = \{p_0, p_1, p_3, p_5\}.$$

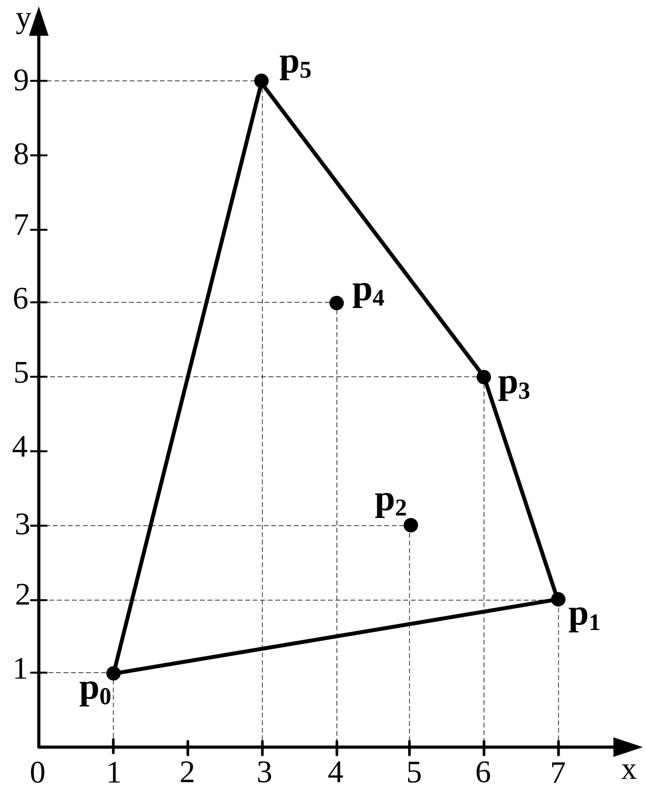


Рисунок 1.120 – Опукла оболонка множини точок задачі 2

Запитання для самоконтролю

1. Дайте визначення опуклої оболонки множини.

2. Назвіть основні алгоритми пошуку опуклої оболонки.

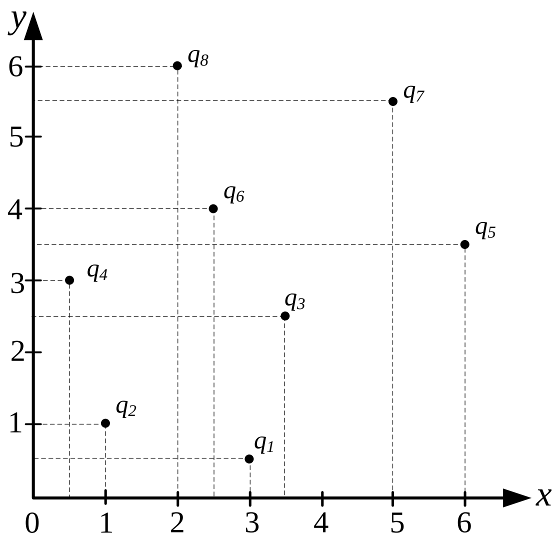
3. У чому полягає ідея алгоритму Джарвіса?

4. Який з алгоритмів (перегляд Грехема чи прохід Джарвіса) потребує менше часу для пошуку опуклої оболонки?

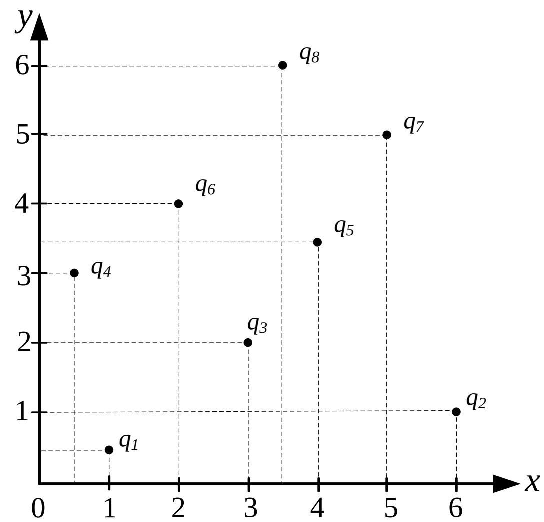
Задачі для аудиторних занять

1. Визначити опуклу оболонку методом Грехема для заданих точок:

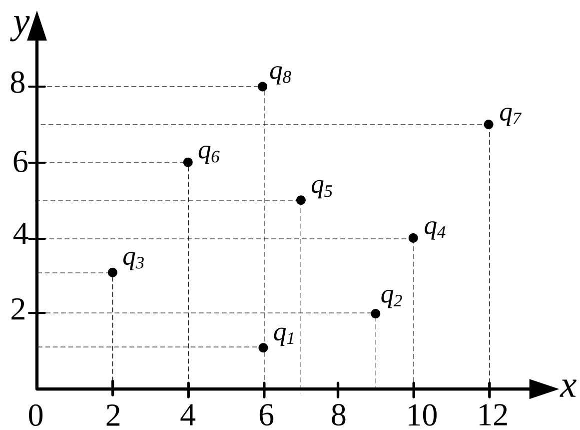
а)



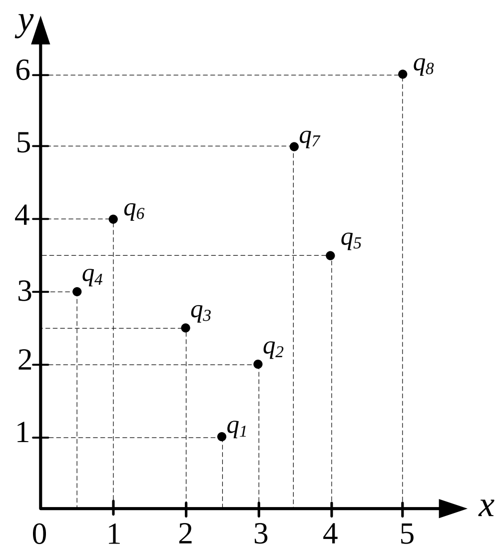
б)



в)



г)



2. Визначити опуклу оболонку методом Джарвіса для заданих точок:

а) $a_1 = (1,5)$, $a_2 = (6,6)$, $a_3 = (7,4)$, $a_4 = (5,1)$, $a_5 = (4,5)$, $a_6 = (8,3)$, $a_7 = (3,3)$;

б) $a_1 = (1,1)$, $a_2 = (1,5)$, $a_3 = (4,6)$, $a_4 = (4,4)$, $a_5 = (5,3)$, $a_6 = (6,3)$, $a_7 = (7,4)$, $a_8 = (2,4)$;

в) $a_1 = (3,6)$, $a_2 = (2,1)$, $a_3 = (5,2)$, $a_4 = (5,5)$, $a_5 = (1,3)$, $a_6 = (6,4)$, $a_7 = (8,4)$;