РОЗДІЛ 1. ЛОГІКА ВИСЛОВЛЕНЬ

Лекція 1. Висловлення та операції над ними. Рівносильні формули. Закони логіки

План

1. Поняття висловлення

2. Логічні операції над висловленнями

3. Формули логіки висловлень

4. Рівносильні формули

5. Закони логіки

1.Поняття висловлення

В природних умовах інформація передається за допомогою слів, об'єднаних у речення. Формальна логіка займається аналізом речень, звертаючи основну увагу на їх форму і відволікаючись від змісту. Розділ логіки, який вивчає висловлення та їхні властивості, називають пропозиційною логікою або **логікою висловлень**.

Означення. Під **висловленням** розуміють розповідне речення, яке виражає певну думку, про яку можна сказати *істинна* вона чи *хибна*.

Значення «істина» чи «хибність», яких набуває висловлення, називають його **значенням істинності.** Значення «істина» позначають $1, T, I$, а «хибність» – $0, F, X$.

Не є висловленнями: речення із суб'єктивною думкою; означення; речення, які можуть бути як істинними, так і хибними.

Приклад 1. Розглянемо речення:

1) Сніг зелений.

2) Київ – столиця України.

3) Якщо семестровий рейтинг студента з дисципліни «Дискретна математика» не менший за 60, то він отримає залік автоматом.

4) $x + 1 = 3$.

5) Котра година?

6) Читай уважно!

Три перші речення – висловлення, решта три – ні, бо четверте речення набуває істинного чи хибного значення залежно від значення змінної x, п'яте та шосте речення – не розповідні. Перше висловлення є хибним, друге та третє – істинними.

Для позначення *змінних висловлень* використовують великі латинські літери.

Висловлення поділяються на *прості (елементарні)* та *складні*.

Означення. **Атомами (елементарними висловленнями)** називаються висловлення, які відповідають простим розповідним реченням, які не мають складових частин. Складні висловлення утворюють із простих висловлень за допомогою *логічних операцій* (*логічних зв'язків*).

Перші два висловлення прикладу 1 є простими, третє – складне.

2. Логічні операції над висловленнями

Означення. **Заперечення** – логічна операція, яка висловленню A ставить у відповідність нове висловлення $\bar{A}$ (чит. не A), яке істинне, коли A хибне і хибне, коли A істинне.

$P(A)$	$P(\bar{A})$
0	1
1	0

Означення. **Кон'юнкція (логічне множення)** – логічна операція, яка двом висловленням A та B ставить у відповідність нове висловлення $A \wedge B$ (чит. A і B), яке істинне тоді і тільки тоді, коли A і B одночасно істинні і хибне у всіх інших випадках.

$P(A)$	$P(B)$	$P(A \wedge B)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0

1	1	1

Означення. **Диз'юнкція (логічна сума)** – логічна операція, яка двом висловленням A та B ставить у відповідність нове висловлення $A \vee B$ (чит. A або B), яке хибне тоді і тільки тоді, коли A і B одночасно хибні і істинне у всіх інших випадках.

$P(A)$	$P(B)$	$P(A \vee B)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Означення. **Імплікація** – логічна операція, яка двом висловленням A та B ставить у відповідність нове висловлення $A \rightarrow B$ (чит. з A слідує B), яке хибне тоді і тільки тоді, коли A – істинне, а $B -$ хибне і істинне у всіх інших випадках.

$P(A)$	$P(B)$	$P(A \rightarrow B)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Означення. **Еквіваленція** – логічна операція, яка двом висловленням A та B ставить у відповідність нове висловлення $A \leftrightarrow B$ (чит. A еквівалентно B), яке істинне тоді і тільки тоді, коли A та B одночасно істинні або хибні і хибне у всіх інших випадках.

$P(A)$	$P(B)$	$P(A \leftrightarrow B)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3. Формули логіки висловлень

Означення **формули** логіки висловлень:

1) кожний атом – це формула;

2) якщо φ та ω – формули, то

$(\bar{\varphi}), (\varphi \wedge \omega), (\varphi \vee \omega), (\varphi \to \omega), (\varphi \leftrightarrow \omega) -$ формули;

3) формули можуть бути породжені тільки скінченною кількістю застосувань вказаних правил.

Для зменшення кількості дужок вважають, що логічні операції мають наступний пріоритет (від найвищого до найнижчого): заперечення, кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація, еквіваленція.

Приклад 2. Записати формулу, яка відповідає висловленням.

1) «Якщо Іван пропустить лекцію з дискретної математики або не повторить матеріал самостійно, то він погано напише модуль».

2) «Оскільки Петро пізно ліг спати, то він проспав і через це не встиг на автобус та спізнився на пару»

Розв'язок.

1) Виділимо елементарні висловлення, які входять до складу нашого першого складного висловлення:

$A -$ «Іван пропустить лекцію з дискретної математики»,

$B -$ «Іван повторить матеріал самостійно»,

$\mathrm{C} -$ «Іван напише модуль погано».

Тоді структуру складного висловлення описує формула

$$A \vee \bar{B} \to C.$$

2) Елементарні висловлення:

$A -$ «Петро пізно ліг спати»;

$B -$ «Петро проспав»;

$\mathrm{C} -$ «Петро встиг на автобус»;

$D -$ «Петро спізнився на пару».

Тоді структуру другого складного висловлення описує формула

$$(A \to D) \to \bar{C} \wedge D.$$

Означення. Під формальною **інтерпретацією** формули логіки висловлень розуміють присвоєння змінним висловленням, з яких побудована формула, деяких значень істинності 0 або 1.

Приклад 3. Вказати значення формули $\varphi \equiv \overline{A \wedge \bar{B}} \leftrightarrow \bar{C} \to B \vee A$ на інтерпретації (1,0,1).

Розв'язок.

$$\varphi(1,0,1) \equiv \overline{1 \wedge \bar{0}} \leftrightarrow \bar{1} \to 0 \vee 1 \equiv \overline{1 \wedge 1} \leftrightarrow 0 \to 1 \equiv \bar{1} \leftrightarrow 1 \equiv 0 \leftrightarrow 1 \equiv 0.$$

Означення. Таблиця, які містить значення формули логіки висловлень на всіх її інтерпретаціях змінних, називається **таблицею істинності формули.**

Приклад 4. Побудувати таблицю істинності формули

$$\varphi \equiv \overline{\bar{A} \vee B} \to (C \leftrightarrow B \wedge \bar{A}).$$

Розв'язок. Поставимо у відповідність кожній підформулі формули окремий стовпчик таблиці.

A	B	C	$\bar{A}$	$\bar{A} \vee B$	$\overline{\bar{A} \vee B}$	$B \wedge \bar{A}$	$C \leftrightarrow B \wedge \bar{A}$	$\overline{\bar{A} \vee B} \to (C \leftrightarrow B \wedge \bar{A})$
0	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0	0	0	1

Означення. Формула логіки висловлень називається **загальнозначущою (тотожно істинною або тавтологією)**, якщо вона є істинною на всіх своїх інтерпретаціях.

Означення. Формула логіки висловлень називається **суперечливою (тотожно фальшивою)**, якщо вона є хибною на всіх своїх інтерпретаціях.

Означення. Формула логіки висловлень називається **виконуваною**, якщо вона є істинною принаймні на одній своїй інтерпретації.

4. Рівносильні формули

Означення. Формули φ та ω називаються **рівносильними (еквівалентними) формулами** логіки висловлень, якщо вони приймають однакові значення істинності на всіх інтерпретаціях змінних, кожна з яких входить принаймні у одну з формул φ або ω. Той факт, що формули **рівносильні**, позначається як $\varphi \equiv \omega$.

Відношення рівносильності формул, побудованих із деякої фіксованої множини атомів, задовольняє умови рефлексивності, симетричності та транзитивності , а отже є відношенням еквівалентності. Тому множина усіх формул розбивається на класи, у кожному з яких містяться рівносильні між собою формули.

5. Закони логіки

Означення. Формула логіки висловлень називається **законом**, якщо вона набуває значення істинності при всіх можливих наборах значень істинності висловлень з яких вона складається.

Рівносильні перетворення формул ґрунтуються на законах логіки висловлень, основні з яких наведені у таблиці.

№	**Назва закону**	**Формулювання**
1	Закон комутативності кон'юнкції	$A \wedge B \equiv B \wedge A$
2	Закон комутативності диз'юнкції	$A \vee B \equiv B \vee A$
3	Закон асоціативності кон'юнкції	$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$
4	Закон асоціативності диз'юнкції	$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$
5	Перший закон дистрибутивності	$A \wedge (B \vee C) \equiv A \wedge B \vee A \wedge C$
6	Другий закон дистрибутивності	$A \vee B \wedge C \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
7	Закон подвійного заперечення	$\bar{\bar{A}} \equiv A$

8	Закон суперечності	$A\wedge\bar{A} \equiv 0$
9	Закон виключення третього	$A\vee\bar{A} \equiv 1$
10	Перший закон де Моргана	$\overline{A\wedge B} \equiv \bar{A}\vee\bar{B}$
11	Другий закон де Моргана	$\overline{A\vee B} \equiv \bar{A}\wedge\bar{B}$
12	Закон ідемпотентності кон’юнкції	$A\wedge A \equiv A$
13	Закон ідемпотентності диз’юнкції	$A\vee A \equiv A$
14	Властивості нуля	$A\wedge 0 \equiv 0, \qquad A\vee 0 \equiv A$
15	Властивості одиниці	$A\wedge 1 \equiv A, \qquad A\vee 1 \equiv 1$
16	Перший закон поглинання	$A\vee A\wedge B \equiv A$
17	Другий закон поглинання	$A\wedge(A\vee B) \equiv A$
18	Модифікований закон поглинання	$A\vee\bar{A}\wedge B \equiv A\vee B$
19	Закон усунення імплікації	$A \to B \equiv \bar{A}\vee B$
20	Перший закон усунення еквівалентності	$A \leftrightarrow B \equiv (A \to B)\wedge(B \to A)$
21	Другий закон усунення еквівалентності	$A \leftrightarrow B \equiv \bar{A}\wedge\bar{B}\vee A\wedge B$

Теорема: Формули φ та ω рівносильні тоді і тільки тоді, коли формула $\varphi \leftrightarrow \omega$ є загальнозначущою.

Теорема: Якщо φ_1 підформула формули ω_1, $\varphi_1 \equiv \varphi_2$, формула ω_2 отримується з формули ω_1 заміною підформули φ_1 на φ_2, то формули ω_1та ω_2 рівносильні.

Ці теореми використовуються для побудови ланцюжків рівносильних формул.

Приклад 1. Для формули $\varphi \equiv \bar{A}\wedge B \to (C \leftrightarrow \bar{A})$ побудувати рівносильну їй формулу, яка містила б лише атоми, символи операцій заперечення і диз’юнкції.

Розв’язок.

$$\bar{A}\wedge B \to (C \leftrightarrow \bar{A}) \equiv \overline{\bar{A}\wedge B}\vee(C \leftrightarrow \bar{A}) \equiv \bar{\bar{A}}\vee\bar{B}\vee(C \leftrightarrow \bar{A}) \equiv A\vee\bar{B}\vee\bar{C}\wedge\bar{\bar{A}}\vee C\wedge\bar{A} \equiv$$

$$\equiv A\vee\bar{B}\vee\bar{C}\wedge A\vee C\wedge\bar{A} \equiv A\vee\bar{B}\vee\overline{\overline{\bar{C}\wedge A}}\vee\overline{\overline{C\wedge\bar{A}}} \equiv A\vee\bar{B}\vee\overline{C\vee\bar{A}}\vee\overline{\bar{C}\vee A}.$$

Приклад 2. З використанням рівносильних перетворень довести, що формула $\varphi \equiv \overline{\bar{\bar{B}} \to \bar{\bar{C}}} \to (C \leftrightarrow A \vee C)$ є загальнозначущою.

Розв'язок. Покажемо, що формула $\varphi \equiv \overline{\bar{\bar{B}} \to \bar{\bar{C}}} \to (C \leftrightarrow A \vee C)$ рівносильна 1.

$$\overline{\bar{\bar{B}} \to \bar{\bar{C}}} \to (C \leftrightarrow A \vee C) \equiv (\bar{B} \to \bar{C}) \vee \bar{C} \wedge \overline{A \vee C} \vee C \wedge (A \vee C) \equiv$$

$$\equiv B \vee \bar{C} \vee \bar{C} \wedge \overline{A \vee C} \vee C \equiv \bar{C} \vee C \vee B \vee \bar{C} \wedge \overline{A \vee C} \equiv 1 \vee B \vee \bar{C} \wedge \overline{A \vee C} \equiv 1.$$

Отже, формула φ є загальнозначущою.