Лекція 3. Потужність множин

План

1. Означення скінченної множини

2. Поняття найбільшого і найменшого елемента множини та їх властивості

3. Потужність множини. Зчисленні (зліченні) множини

1. Означення скінченної множини

Означення. Множина M називається скінченною, якщо існує таке натуральне число m, що між множиною перших m натуральних чисел і елементами множини M можна встановити взаємно однозначну відповідність.

Теорема 1. Для того щоб між скінченними множинами можна було встановити взаємно однозначну відповідність необхідно і достатньо щоб вони налічували однакову кількість елементів.

Теорема 2. Між скінченними множинами X, Y потужності m можна встановити взаємно однозначну відповідність $m!$ способами.

Доведення.

Нехай $|X| = |Y| = m,$ тобто $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}, Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$. При побудові відповідностей елементові x_1 можна вибрати образ m способами. Для кожного вибраного образу x_1 елементу x_2 можна вибрати образ $m-1$ способами і т. д. Елементу x_m образ можна вибрати 1 способом. Загальна кількість способів $m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot 1 = m!$ Теорему доведено.

Нехай маємо дві множини X, Y. Говорять, що між множинами X, Y задано **відображення** φ, якщо кожному $x \epsilon X$ поставлено у відповідність $y \epsilon Y$. Якщо множини X, Y скінченні, то $\varphi: X \to Y$ зручно задавати за допомогою таблиці наступного вигляду

x	x_1	…	x_n
$\varphi(x)$	y_{i1}	…	y_{in}

Приклад. Нехай $X = \{1; 2\}, Y = \{a, b\}$. Побудувати усі можливі відображення $\varphi: X \to Y$.

1	2
a	b

1	2
b	a

1	2
a	a

1	2
b	b

Теорема. Нехай $|X| = n,\ |Y| = m$. Число усіх можливих відображень множини X в множину Y є m^n.

Доведення. Нехай $= \{x_1, x_2, \dots, x_n\},\ Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$. Складемо усі можливі таблиці відображень. Оскільки у кожній клітинці нижнього рядка таблиці може стояти одне із можливих значень Y, то усіх можливих таблиць за правилом множення буде $m \cdot m \cdot \dots \cdot m = m^n$.

2. Поняття найбільшого і найменшого елемента множини та їх властивості

Нехай $A -$ деяка множина, $B \subset A,\ B \neq A$.

Означення. **Верхньою межею** підмножини B у множині A називається такий елемент $\overline{m} \in A$ для якого виконується

$$\forall x \in B: x \leq \overline{m}.$$

Нижньою межею підмножини B у множині A називається такий елемент $\underline{m} \in A$ для якого виконується

$$\forall x \in B: x \geq \underline{m}.$$

Очевидно, що верхніх і нижніх меж для підмножини B у множині A може бути декілька.

Означення. Елемент $a \in A$ називається **найбільшим елементом** у множині A, якщо він є верхньою межею у множині A, **найменшим** – нижньою межею.

Означення. Найменша із верхніх меж підмножини B у множині A називається **точною верхньою межею** і позначається $\sup\limits_{A} B$. Найбільша із нижніх меж – **точною нижньою межею**. Позначається $\inf\limits_{A} B$.

Означення. Елемент m називається **максимальним** у всій множині, якщо не існує елемента $b \in A$, який більший за m. Елемент m називається **мінімальним** у всій множині, якщо не існує елемента $b \in A$, який менший за m.

3. Потужність множини. Зчисленні (зліченні) множини

Наявність взаємно однозначної відповідності між елементами двох скінченних множин свідчить про однакову кількість їх елементів. Цей спосіб порівняння скінченних множин застосовуємо до нескінченних.

Означення. Дві множини називаються **рівно потужними (еквівалентними)**, якщо між їх елементами можна встановити взаємно однозначну відповідність. Наприклад, $N -$ множина натуральних чисел, $M -$ множина додатних парних чисел. Встановимо взаємно однозначну відповідність між цими множинами

$$\forall n \in N: \varphi(n) = 2n.$$

Позначають $N \sim M$.

Означення. Множина, яка є еквівалентною множині натуральних чисел називається **зчисленною.**

Властивості зчисленних множин

Теорема 1. Довільна підмножина зчисленної множини або скінченна, або зчислена.

Доведення. Нехай $A -$ зчисленна множина, $B \subset A$. Елементи множини A можна занумерувати: $A = \{a_1; a_2; a_3; \ldots\}$. Серед цих елементів знаходяться і усі елементи її підмножини B, тобто $B = \{a_p; a_q; \dots\}$. Щоб виділити ці елементи з множини A будемо перебирати елементи з множини A у порядку їх запису і при зустрічі з елементами множини B будемо ставити їм у відповідність номер зустрічі. В результаті цього дістанемо множину елементів $\{a_{p_1}; a_{q_2}; \dots\}$, яка є підмножиною множини B.

При такій нумерації можливі лише 2 випадки:

1) Нумерація елементів множини B припиниться на якомусь натуральному числі. Тоді множина $B -$ скінченна.

2) Нумерація елементів B продовжується нескінченно. Тоді множина $B -$ зчислена, бо за допомогою других індексів ми її елементи занумерували.

Наслідок. Якщо із зчисленої множини A вилучити скінченну множину B, то різниця $A \backslash B -$ зчисленна множина.

Теорема 2. З будь-якої нескінченної множини M можна виділити зчисленну підмножину A, так, що різниця $M \backslash A$ буде нескінченною.

Теорема 3. Об'єднання зчисленої і скінченної множини є множина зчислена.

Теорема 4. Об'єднання скінченної кількості зчисленних множин є множина зчисленна.

Теорема 5. Об'єднання зчисленної кількості зчисленних множин, які попарно не перетинаються, є множина зчисленна.

Наслідок. Множина раціональних чисел $Q -$ зчислена.

Теорема. Будь-яка нескінченна множина рівно потужна деякій своїй власній підмножині.

Означення. Множина називається **нескінченною**, якщо вона рівно потужна деякій своїй власній підмножині.