Лекція 10. Задання графів та операції над ни. Зв’язність графів

План

1. ***Ізоморфізм графів***
2. ***Матричне задання графів***
3. ***Частини графа і підграфи***
4. ***Операції над графами***
5. ***Зв’язність, компоненти зв’язності***
6. ***Зв’язок між компонентами зв’язності та відношеннями заданими на множині вершин***
7. ***Матриці зв’язності***

1. Ізоморфізм графів

Означення. Два графи $G_1(U_1, V_1)$ та $G_2(U_2, V_2)$ називаються ізоморфними, якщо між множинами V_1 та V_2 можна встановити таку взаємнооднозначну відповідність $\varphi: V_1 \leftrightarrow V_2$, щоб довільній парі вершин A, B графа G_1, які є суміжними, відповідала пара вершин $\varphi(A), \varphi(B)$ графа G_2, які є також суміжними.

Властивості ізоморфних графів

1. Кількість вершин і ребер в ізоморфних графах однакова.

2. Для неорієнтованих графів степені відповідних вершин співпадають, а для орграфів степені входу і виходу співпадають.

Дані властивості не є достатніми.

В загальному випадку задача встановлення ізоморфізму складна. Лише для деяких класів графів розроблені ефективні алгоритми, які дозволяють перевірити ізоморфізм графів.

Очевидно, що відношення бути ізоморфним є відношенням еквівалентності. Отже, множина всіх графів розбивається на класи ізоморфних графів. Ізоморфні графи ототожнюють. Про графи, які розрізняють з точністю до ізоморфізму, говорять «абстрактнийграф».

2. *Матричне задання графів*

При великій кількості вершин і ребер графа малюнок графа втрачає наочність. В таких випадках для задання графів і роботи з ними використовують таблиці спеціального виду, які називають матрицями.

Означення. **Матрицею суміжності** неорієнтованого графа $G(U,V)$, який має n вершин, називається матриця розмірності $n \times n$, елементи якої визначаються за правилом

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & A_i \text{ суміжна з } A_j \\ 0, & \text{у протилежному випадку} \end{cases}.$$

Означення. **Матрицею суміжності** орграфа $G'(U,V)$, який має n вершин, називається матриця розмірності $n \times n$, елементи якої визначаються за правилом

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо існує дуга } A_iA_j \\ 0, & \text{у протилежному випадку} \end{cases}$$

Матриця суміжності неорієнтованого графа симетрична і по головній діагоналі має нулі. Матриця суміжності орграфа не симетрична. Для псевдографа нулі і одиниці у матриці суміжності замінюємо кратностями ребер, які з'єднують відповідні вершини. Це дає опис графа матрицею з цілими невід'ємними елементами і навпаки: довільна матриця такого типу може інтерпретуватися, як граф.

Теорема. Два графи ізоморфні тоді і лише тоді, коли їх матриці суміжності можна отримати одна з одної однаковим переставлянням рядків і стовпців.

Означення. **Матрицею інцидентності** неорієнтованого графа $G(U,V)$, який має n вершин і m ребер, називається матриця розмірності $n \times m$, елементи якої визначаються за правилом

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & A_i \in e_j \\ 0, & \text{у протилежному випадку} \end{cases}.$$

Означення. **Матрицею інцидентності** орграфа, який має n вершин і m ребер, називається матриця розмірності $n \times m$, елементи якої визначаються за правилом

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & A_i \text{ є початком } e_j \\ -1, & A_i \text{ є кінцем } e_j \\ 0, & \text{у протилежному випадку} \end{cases}.$$

Властивості матриць

1. Для неорієнтованого мультиграфа сума елементів і i-му рядку (стовпці) матриці суміжності дорівнює степеню вершини V_i.

2. Степені виходу і входу вершин орграфа визначаються через елементи матриці суміжності за допомогою формул:

$$\rho^{+}(V_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \text{ (сума по рядку)},$$

$$\rho^{-}(V_i) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \text{ (сума по стовпці)}.$$

3. Для орієнтованого мультиграфа справджується твердження:

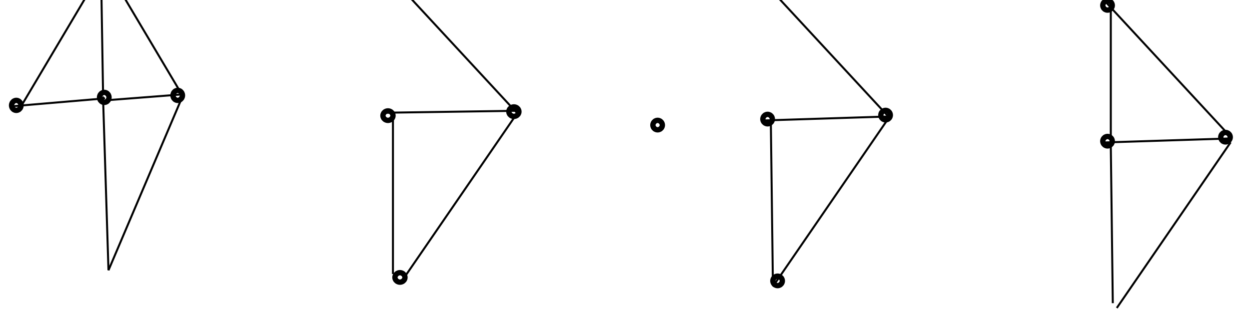
- поелементна сума рядків матриці інцидентності дорівнює нульовому рядку;
- рядки матриці інцидентності лінійно залежні.

3. Частини графа і підграфи

Означення. Граф H називається **частиною** графа G, якщо множина вершин графа H є підмножиною вершин графа G і усі ребра графа H є ребрами графа G.

Означення. Частина H графа G, множина вершин якої співпадає з множиною вершин графа G називається **сурграфом** графа G.

Означення. Частина H графа G називається підграфом графа G, якщо множина ребер графа H є усі ребра графа G, обидва кінці яких належать частині H.



Граф G Частина граф G Суграф графа G Підграф графа G

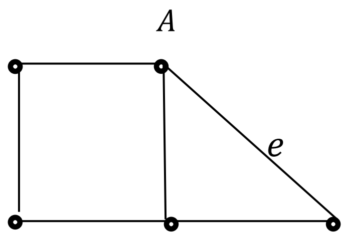
4. Операції над графами

Нехай дано граф $G = (U, V),\ e \in U$.

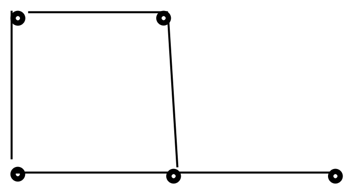
1. Операція вилучення ребра

Говорять, що граф G_1 утворений із графа G внаслідок операції **вилучення ребра** e, якщо $G_1 = (U \backslash \{e\}, V)$.

Можна показати, що в результаті виконання підряд кількох операцій вилучення ребра результат не залежить від порядку вилучення ребер.



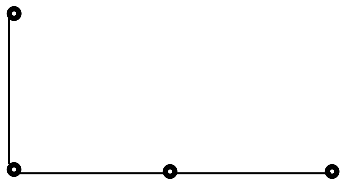
G



G_1

2. Операція вилучення вершини

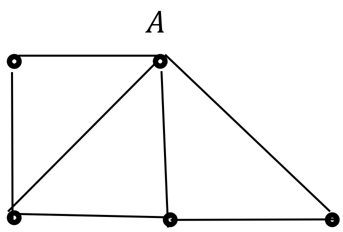
Говорять, що граф G_2 утворений із графа G внаслідок операції **вилучення вершини** A, якщо вершина A вилучається з V, а з множини U вилучаються усі ребра кінці яких інцидентні цій вершині.



G_2

3. Операція введення ребра

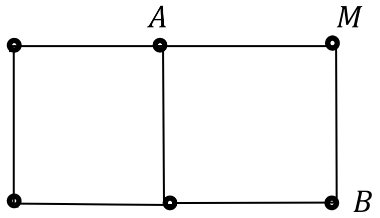
Нехай $A, D \in V; AD \notin U$. Говорять, що граф G_3 утворений із графа G внаслідок операції **введення ребра** AD, якщо $G = (U \cup \{AD\}, V)$.



D G_3

4. Операція введення вершини в ребро

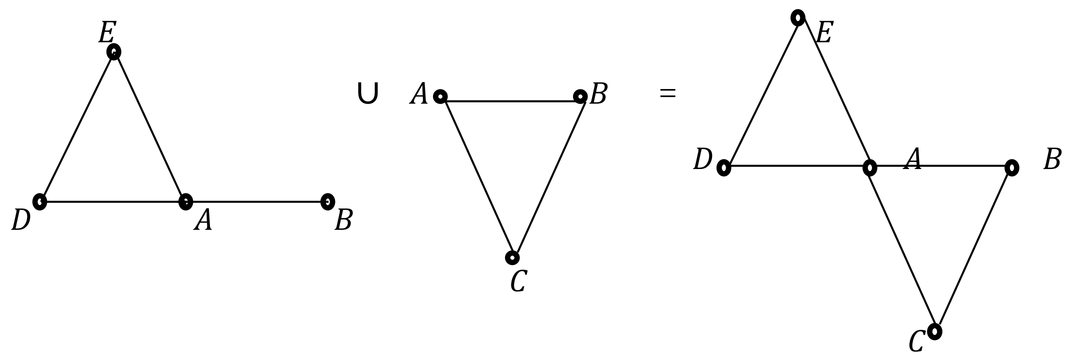
Нехай $AB \in U$. Говорять, що граф G_4 утворений із графа G внаслідок операції **введення вершини** M у ребро AB, якщо ребро AB вилучається, а добавляються два ребра AM і MB.



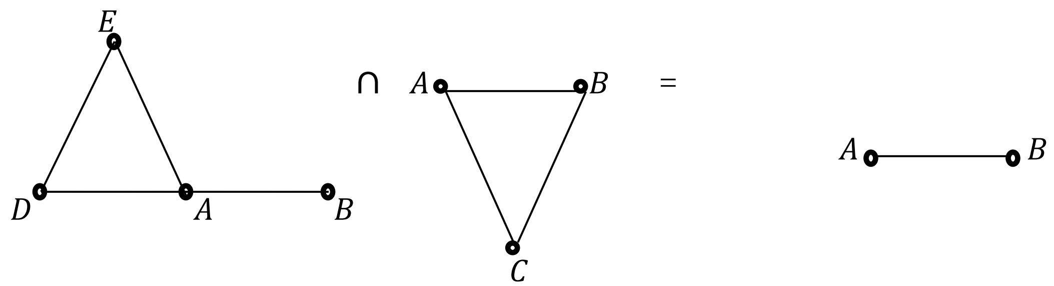
5. Операція об'єднання і перерізу графів

Нехай H_1 та H_2 два довільні графи, які можна розглядати, як частини деякого складнішого графа.

Означення. **Об'єднанням** двох графів H_1 та H_2 називається граф, який складається з усіх ребер, які належать принаймні одному з графів H_1 чи H_2.



Означення. Перерізом двох графів H_1 та H_2 називається граф множина вершин якого є перерізом множин вершин графів H_1 та H_2, а множина ребер є перерізом множин ребер H_1 та H_2.



5. Зв’язність, компоненти зв’язності

Означення. Неорієнтований граф називається **зв’язним**, якщо для довільних двох його вершин існує маршрут, який сполучає ці вершини.

Означення. Орграф називається **сильнозв’язним**, якщо для довільних двох його вершин існує маршрут, який сполучає ці вершини.

Якщо в орграфі кожну дугу замінити ребром, то отримаємо граф, який називається **асоційованим** з даним орграфом.

Означення. Орграф називається **слабо зв’язним**, якщо асоційований з ним граф зв’язний.

Означення. **Компонентою зв’язності** графа G називається зв’язний підграф, який не є власним підграфом будь-якого іншого зв’язного підграфа графа G.

З означення компонент зв’язності випливають наступні твердження:

1. Якщо H є компонентою зв’язності графа G, то граф H є підграфом графа G, який породжується множиною вершин графа H.

2. Якщо H є сильною компонентою зв’язності орграфа G, то H є орієнтованим підграфом графа G, який породжується множиною вершин H.

Означення. Ребро AB називається **мостом** графа G, якщо після його вилучення вершини A і B стають не зв’язними.

Ознаки мостів

1. Ребро AB є мостом тоді і тільки тоді, коли AB єдиний ланцюг, який з’єднує A і B.

2. Ребро AB є мостом тоді і тільки тоді, коли знайдуться дві вершини C_1 і C_2 такі, що кожен ланцюг, який їх з’єднує містить A і B.

3. Ребро AB є мостом тоді і тільки тоді, коли воно не належить жодному циклу.

Означення. **Числом вершин зв’язності** графа G називається найменше число вершин, вилучення яких приводить до незв’язного графа, або графа, який складається з однієї вершини. Позначається $\varkappa(G)$.

Означення. **Числом реберної зв'язності** графа G називається найменше число ребер, вилучення яких приводить до незв'язного графа. Позначається $\lambda(G)$.

6. Зв'язок між компонентами зв'язності та відношеннями заданими на множині вершин

Означення. Вершини V_i та V_j графа G перебувають у **відношенні досяжності** d тоді і тільки тоді, коли вони співпадають, або існує маршрут, який їх з'єднує.

Теорема (Про зв'язок відношення досяжності з компонентами зв'язності)

Якщо $d-$ відношення досяжності задане на множині вершин графа $G(U,V)$, то:

1. Відношення d є відношенням еквівалентності на множині вершин $V.$

2. Довільні вершини V_i та V_j перебувають у відношенні d тоді і тільки тоді, коли вони належать одній і тій же компоненті зв'язності графа $G.$

3. Для будь-якого класу еквівалентності, який належить фактор множині за відношенням d псевдограф, породжений підмножиною вершин, буде компонентою зв'язності графа $G.$

Означення. Вершина V графа G називається **розділяючою,** якщо вилучення цієї вершини приводить до збільшення числа компонент зв'язності.

Теорема. Якщо $G'(U',V')$ псевдограф, який утворюється з псевдографа $G(U,V)$ вилученням деяких вершин, то матриця суміжності графа G' отримується з матриці суміжності графа G шляхом викреслення рядків і стовпців, що відповідають вершинам і ребрам, які вилучені.

7. Матриці зв'язності

Означення. **Матрицею зв'язності** неорієнтованого графа, який має n вершин, називається матриця розмірності $n \times n$, елементи якої визначаються за правилом

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } A_i \text{ досяжна з } A_j \\ 0, & \text{у протилежному випадку} \end{cases}.$$

Аналогічно дається означення **матриці зв'язності** орграфа.

Означення. **Матрицею сильної зв'язності** орграфа, який має n вершин, називається матриця розмірності $n \times n$, елементи якої визначаються за правилом

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } A_i \text{ досяжна з } A_j \text{ і навпаки} \\ 0, & \text{у протилежному випадку} \end{cases}$$