Лекція 11. Пошук оптимальних маршрутів у графі. Ейлерові цикли та ланцюги

План

1. ***Алгоритми пошуку маршрутів у графах. Теорема Таррі***
2. ***Алгоритми пошуку мінімальних маршрутів у ненавантаженому та навантаженому графах***
3. ***Ейлерові графи. Теорема про ейлерові ланцюги***
4. ***Алгоритм Флері***
5. ***Гамільтонові графи***

1. *Алгоритми пошуку маршрутів у графах. Теорема Таррі*

У багатьох практичних задачах, математичні моделі яких описують графами, потрібно відшукати маршрут, який з'єднує ці вершини. Для зв'язного графа такий маршрут завжди існує.

Алгоритм Таррі

Початкова вершина – V_p, кінець маршруту – V_k.

Для відшукання одного із маршрутів, який сполучає вершини V_p і V_k користуються правилом:

1. Пошук маршруту починають з вершини V_p, ідуть по довільному ребру, інцидентному цій вершині, відмічаючи напрямок у якому це ребро пройдене. Виходячи з вершини V_i вибирають те ребро, яке не було пройдене ще жодного разу. Якщо таких ребер не має, то вибирають ребро, яке було пройдене у протилежному напрямку.

2. Для кожної вершини відмічають те ребро (засікою) по якому у цю вершину зайшли перший раз. По ребру із засікою вертаються лише тоді, коли інших можливостей немає.

Через скінченне число кроків буде знайдена вершина V_k. Алгоритм Таррі результативний для довільного зв'язного графа. Якщо граф незв'язний, то алгоритм дозволяє виділити компоненти зв'язності.

Теорема Таррі. Якщо граф зв'язний, то можна побудувати циклічний маршрут, який містить усі ребра графа рівно два рази, по одному в кожному напрямку.

2. Алгоритми пошуку мінімальних маршрутів у ненавантаженому та навантаженому графах

Нехай задано неорієнтований зв'язний граф $G = (U, V)$ і дві його вершини V_p і V_k.

Означення. Маршрут з вершини V_p у вершину V_k називається **мінімальним**, якщо він з'єднує ці вершини і має найменшу довжину серед усіх маршрутів, які їх сполучають.

Будемо вважати, що усі ребра графа мають однакову довжину, рівну одиниці, тобто усі ребра рівноправні. Такий граф називають **ненавантаженим.**

За допомогою ненавантажених графів описують системи, які можуть переходити з одного стану в інший. Усі стани рівноправні (однаково ймовірні).

Алгоритм Беллмана

Кожній вершині графа приписують індекс так, що він дорівнює довжині найкоротшого маршруту, який сполучає цю вершину з кінцевою V_k.

1. Індексування вершин графа починають з кінцевої вершини V_k. Їй приписують індекс 0. Усім суміжним вершинам з V_k приписують індекс 1.

2. Якщо вершині V_i приписано індекс λ_i, то суміжним з нею вершинам, яким ще не приписано індекс, приписують індекс $\lambda_{i+1} = \lambda_i + 1$. Якщо одній і тій же вершині можна приписати декілька індексів, то вибирають найменший.

3. Процес приписування індексів продовжують до тих пір, поки усі вершини не будуть проіндексовані. Пошук мінімального маршруту починають із початкової вершини V_p, рухаючись до тієї вершини в якої менший індекс.

Відшукання мінімального маршруту у навантаженому графі

Нехай задано граф $G = (U, V)$ і кожному йому ребру $V_i V_j$ приписана довжина $l(V_i V_j)$, яка називається **вагою** ребра.

Потрібно відшукати маршрут мінімальної довжини, який з'єднує вершини V_p і V_k. Алгоритм Белманна для розв'язання цієї задачі не застосовний, бо може існувати маршрут меншої довжини, але який складається з більшої кількості ребер. Тому для відшукання мінімального маршруту у навантажених графах користуються наступним алгоритмом.

1. Кінцевій вершині приписують індекс 0, усім іншим ∞.

2. Для вершини V_j шукають те ребро, для якого виконується умова $\lambda_j - \lambda_i \geq l(V_iV_j)$ (різниця індексів більш рівна довжині ребра). Вершині V_j приписують індекс $\lambda_j = \lambda_i + l(V_iV_j)$. Процес приписування індексів продовжують до тих пір, поки можна зменшити індекс вершини V_j.

3. Коли усі вершини будуть проіндексовані, починають пошук мінімального маршруту з початкової вершини. Для кожної вершини шукають те ребро, для якого різниця індексів дорівнює довжині ребра. Процес буде скінченним, оскільки на кожному кроці значення індексу зменшується на довжину ребра.

3. Ейлерові графи. Теорема про ейлерові ланцюги

Означення. **Цикл**, який містить усі ребра графа рівно по одному разу називається **ейлеровим.** Граф, який містить ейлеровий цикл називається **ейлеровим.**

Теорема Ейлера (для графа). Для того щоб скінченний зв'язний граф мав ейлеровий цикл необхідно і достатньо, щоб усі його вершини мали парний степінь.

Теорема Ейлера (для орграфа). Для того щоб скінченний орграф мав ейлеровий цикл необхідно і достатньо, щоб степіні входу і виходу кожної вершини були рівні.

Означення. **Ланцюг** називається **ейлеровим**, якщо він має різні вершини початку і кінця та включає усі ребра графа рівно один раз.

Теорема (про ейлерові ланцюги). Для того, щоб скінченний ланцюг зв'язного графа був ейлеровим з кінцями A і B ($A \neq B$) необхідно і достатньо, щоб A і B були єдиними непарними його вершинами.

Теорема (про сім'ю ейлерових ланцюгів). На довільному зв'язному графі з $2k$ непарними вершинами існує сім'я з k ланцюгів, які в сукупності містять усі ребра графа рівно по одному разу.

4. Алгоритм Флері

Ейлеровий граф може мати декілька ейлерових циклів. Виникає питання, як знайти один з них. Відповідь дає наступний алгоритм.

Алгоритм Флері

1. Вибираємо довільну вершину V_0. Ідемо по довільному ребру позначивши його №1. Пройшовши ребро викреслимо його.

2. Якщо на k-му кроці зайшли у вершину V_k, то для наступного ходу вибираємо ребро інцидентне цій вершині. Ребро-міст вибираємо лише в тому випадку, коли інших ребер не має. Оскільки степені вершин парні, то граф може закінчити роботу лише в початковій вершині.

5. Гамільтонові графи

У 1957 році ірландський математик Гамільтон запропонував гру «Подорож по додекаедру».

Додекаедр – многогранник, гранями якого служать 12 правильних п'ятикутників. У нього 20 вершин і 30 ребер. В кожній вершині по 3 ребра.

Гра полягала в обході по ребрах усіх вершин додекаедра при умові, що в кожну вершину не можна заходити більше одного разу.

Означення. **Гамільтоновим циклом (ланцюгом)** називається цикл (ланцюг), який проходить через кожну вершину графа рівно один раз.

Означення. **Граф**, який має гамільтоновий цикл називається **гамільтоновим.**

Пошук критерію гамільтонового графа – одна з основних невирішених проблем теорії графів. Про Гамільтонові графи відомо мало. Основні результати висвітлені у таких теоремах.

Теорема 1. Будь-який повний граф є гамільтоновим.

Теорема 2 (Оре). Якщо для довільної пари несуміжних вершин графа, який містить не менше трьох вершин виконується умова $\rho(V_i) + \rho(V_j) \geq n$, де $n -$ число вершин, то граф гамільтоновий.

Теорема 3 (Дірака). Якщо число вершин графа не менше трьох і для кожної вершини $\rho(V_i) \geq \frac{n}{2}$, то граф гамільтоновий.

Дані умови не є необхідними. Наприклад, граф у вигляді куба має 8 вершин зі степенями 3. Проте умова $\rho(V_i) \geq \frac{n}{2}$ не виконується, бо 3$< \frac{8}{2}$.

Один з методів пошуку гамільтонового циклу – метод перебору. Нумерують усі вершини і розглядають перестановки вивчаючи, чи утворюють вони гамільтоновий цикл. Якщо граф з n вершинами не є гамільтоновим, то потрібно буде перебрати $(n-1)!$ перестановок. На практиці користуються алгоритмами часткового перебору, проте складність таких алгоритмів досить велика.