РОЗДІЛ 4. КОМБІНАТОРИКА

Лекція 7. Основні поняття та формули комбінаторики

Комбінаторні тотожності. Сполуки з повторенням

План

1. Предмет комбінаторики. Правило суми та добутку

2. Розміщення, перестановки та комбінації без повторень

3. Біном Ньютона. Властивості біноміальних коефіцієнтів

4. Розміщення, перестановки та комбінації з повтореннями

5. Принцип включень та виключень

1. Предмет комбінаторики. Правило суми та добутку

Комбінаторика – це галузь математики, яка вивчає скінченні множини.

У комбінаториці розглядають два основних правила: правило суми і правило добутку.

Правило добутку

Якщо об'єкт A можна вибрати $n-$ способами і при кожному з цих виборів об'єкт B можна вибрати $m-$ способами, то пару (A, B) можна вибрати $n \cdot m-$ способами.

Дане правило добутку можна узагальнити на декілька множин.

Правило суми

Якщо об'єкт A можна вибрати $n-$ способами, об'єкт B можна вибрати $m-$ способами, причому ніякий вибір A не співпадає з жодним вибором B, то один з об'єктів A або B можна вибрати $n+m-$ способами.

Приклад 1. У групі 21 студент. Скількома способами можна вибрати в цій групі трьох студентів для проходження виробничої практики на трьох підприємствах?

Розв'язання. Для першого підприємства можна вибрати будь-кого із студентів, тобто таких можливостей 21, для другого підприємства таких можливостей вже 20 і для третього – 19. Отже, всього можливостей для вибору групи з трьох студентів $21 \cdot 20 \cdot 19 = 7980$.

Приклад 2. Нехай є чотири пункти A, B, C, D. З пункту A в пункт B веде n доріг, з B в $C - m$ доріг, з A в $D - k$ доріг, з D в $C - l$ доріг. Пункти B і D між собою безпосередньо не сполучені. Скількома способами можна попасти з пункту A в пункт C?

Розв'язання. Згідно правила добутку з A в C через пункт B веде $n \cdot m$ доріг, а через пункт D веде $k \cdot l$ доріг. Загальна кількість доріг за правилом суми $n \cdot m + k \cdot l$.

2. Розміщення, перестановки та комбінації без повторень

Нехай множина M містить n різних предметів $a, b, c, \dots, l$ будь-якої природи. Упорядкуємо цю множину, занумерувавши її елементи. Перший елемент позначимо символом a_1, другий $a_2, \dots, n$-й – a_n. Матимемо скінченну послідовність $a_1, a_2, \dots, a_n$, яку називають перестановкою з n елементів.

Означення. **Перестановкою** з n елементів називається будь-яке розміщення даних n елементів у деякому певному порядку.

З даних n елементів можна утворити кілька різних перестановок.

Приклад 3. Маємо два елементи a, b. Можливі дві перестановки: $\{a, b\}, \{b, a\}$. Маємо три елементи a, b, c. Можливі шість перестановок: $\{a, b, c\}$, $\{a, c, b\}, \{b, a, c\}, \{b, c, a\}, \{c, a, b\}, \{c, b, a\}$.

Кількість усіх можливих перестановок з n елементів позначають символом P_n ($P -$ перша буква французького слова *permutation* – перестановка).

Теорема. Кількість P_n усіх можливих перестановок з n елементів дорівнює добутку послідовних натуральних чисел від 1 до n включно, тобто

$$P_n = n! \qquad (1)$$

(Доведення теореми проводиться методом математичної індукції).

Означення. **Розміщенням** із n елементів по k $(k \leq n)$ називається будь-яка впорядкована k-елементна підмножина даної множини.

Кількість усіх можливих розміщень із n елементів по k позначається символом A_n^k (A − перша буква французького слова *arrangement* – розміщення).

Два розміщення вважаються різними не лише тоді, коли вони відрізняються деякими елементами, а й тоді, коли вони складені з однакових елементів і відрізняються їх порядком.

Теорема. Для довільних натуральних n і k $(k \leq n)$ має місце формула

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1). \tag{2}$$

Ураховуючи позначення $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$, формулу (2) можна записати

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{3}$$

Означення. **Комбінацією** із n елементів по k $(k \leq n)$ називається будь-яка k-елементна підмножина даної множини.

Кількість усіх можливих комбінацій із n елементів по k позначається символом C_n^k (C − перша буква французького слова *combination* – сполучення).

Комбінації, на відміну від розміщень, – невпорядковані підмножини заданої множини.

Теорема. Для довільних натуральних n і k $(k \leq n)$ має місце формула

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}. \tag{4}$$

Часто формулу (4) записують у іншій формі. Помножимо чисельник і знаменник формули (4) на $(n-k)!$. Дістанемо

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(n-k)!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Отже,

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}. \tag{5}$$

Зауваження. При $n = k$ у знаменнику дістанемо вираз 0!. Вважають, що $0! = 1$.

Теорема. Для довільних натуральних n і k $(k \leq n)$ має місце **формула Лапласа**

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}. \tag{6}$$

З формули (6) випливає простий спосіб обчислення чисел C_n^k, які називають **біноміальними коефіцієнтами**. Цей спосіб називається **трикутником Паскаля.**

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..$

У цій таблиці кожне число, крім крайніх одиниць, дорівнює сумі двох чисел, які стоять над ним. Оскільки $C_n^0 = C_n^n = 1$ при довільному n, то з формули Паскаля випливає, що n-й рядок цієї таблиці складений із чисел C_n^k $(k = \overline{0, n})$.

У французького математика Блеза Паскаля ця таблиця наведена в «Трактаті про арифметичний трикутник». Біноміальні коефіцієнти Блез Паскаль утворював за розробленим ним способом повної математичної індукції – у цьому полягало одне з найважливіших відкриттів Паскаля. Новим було й те, що біноміальні коефіцієнти виступали тут як числа комбінацій із n елементів по k.

3. Біном Ньютона. Властивості біноміальних коефіцієнтів

Теорема. Кількість усіх підмножин n-елементної множини дорівнює 2^n.

Наслідок. Для довільного $n \in N$ виконується

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n, \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n.$$

Двочлен $(a + b)$ називається **біномом.** З шкільного курсу математики відомо, що

$$(a + b)^0 = 1,$$

$$(a+b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b,$$
$$(a+b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ab + 1 \cdot b^2,$$
$$(a+b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2 b + 3 \cdot ab^2 + 1 \cdot b^3,$$
$$(a+b)^4 = 1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3 b + 6 \cdot a^2 b^2 + 4 \cdot ab^3 + 1 \cdot b^4.$$

Аналізуючи ці формули, легко помітити, що коефіцієнти у правих частинах дорівнюють числам із відповідних рядків трикутника Паскаля. Цей збіг не випадковий.

Теорема. При довільному натуральному n має місце формула

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^n b^n,$$
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, a^{n-k} b^k.$$

Можна показати, що коефіцієнт $(k+1)$-го члена розкладу Бінома дорівнює добутку коефіцієнта k-го члена на показник степеня a в цьому члені, поділеному на k. Коефіцієнти C_n^k називаються **біноміальними коефіцієнтами.**

Основні властивості формули бінома Ньютона

1. Розклад n-го степеня бінома містить $n+1$ членів.

2. Показники степеня при a спадають від n до 0; показники степеня при b зростають від 0 до n. Сума показників степенів при a і b у кожному члені розкладу дорівнює n.

3. Біноміальні коефіцієнти розкладу є числа, які стоять у -му рядку трикутника Паскаля. Коефіцієнти членів, рівновіддалених від кінців, рівні між собою.

4. Якщо показник степеня бінома – парне число, то біноміальний коефіцієнт середнього члена є найбільшим; якщо ж показник степеня бінома – непарне число, то біноміальні коефіцієнти двох середніх членів рівні між собою і є найбільшими.

5. $(k+1)$-й член розкладу T_{k+1} визначається формулою

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

6. Сума біноміальних коефіцієнтів розкладу, які розміщенні на парних місцях, дорівнює сумі коефіцієнтів членів розкладу, які розміщені на непарних місцях, тобто

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots$$

У формулу бінома Ньютона $(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, x^{n-k} a^k$ підставимо значення $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$:

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} x^{n-k} a^k, \text{або } (x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,l!} x^l a^k, \qquad (*)$$

де підсумування поширюється на всі можливі системи цілих невід'ємних значень $k, l,$ які задовольняють умову $k + l = n.$

Узагальненням формули $(*)$ є формула піднесення до n-го степеня суми $x_1 + x_2 + \cdots + x_m$.

Теорема (поліноміальна)

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m=n} \frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_m!} {x_1}^{\alpha_1} {x_2}^{\alpha_2} \ldots {x_m}^{\alpha_m},$$

де підсумування поширюється на всі можливі системи цілих невід'ємних значень, які задовольняють умову $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m = n.$

Означення. Коефіцієнти $\frac{n!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_m!}$, з якими члени ${x_1}^{\alpha_1}{x_2}^{\alpha_2}\ldots{x_m}^{\alpha_m}$ взодять до розкладу $(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n$ називаються

4. Розміщення, перестановки та комбінації з повтореннями

Нехай дано множину M яка містить n різних елементів будь-якої природи, $k -$ довільне натуральне число.

Означення. **Розміщенням із повтореннями** з n елементів по k називається будь-який впорядкований набір виду $(a_1,\ a_2, \ldots, a_k)$, де a_1, $a_2, \ldots, a_k \in M$.

Кількість розміщень із повтореннями з n елементів по k позначається $\overline{A_n^k}$.

На відміну від розміщень без повторень, у цьому випадку може бути $k \geq n$.

Розміщення з повтореннями з n елементів по k називають також **упорядкованими k-вибірками з поверненням з n-елементної множини.**

Ця назва пояснюється тим, що розміщення з повтореннями можна дістати так: вибрати довільний елемент $a_1 \in M,$ записати його на першому місці і повернути до множини M; знову вибрати довільний елемент $a_2 \in M$ (може трапитись, що $a_1 = a_2$), записати його на другому місці і знов повернути до M і т. д. Повторивши цю операцію k раз ми дістанемо k-вибірку з множини M.

Теорема. Для довільних натуральних n, k має місце формула

$$\overline{A_n^k} = n^{\,k}. \tag{1}$$

З n різних елементів можна утворити $n!$ перестановок. Але якщо серед даних n предметів є однакові, то перестановки, які утворюються одна з одної переставлянням однакових елементів, нічим не відрізняються, тому їх кількість менша за $n!$.

Означення. **Перестановкою з повтореннями** з n елементів називається будь-яке впорядкування -елементної множини, серед елементів якої є однакові.

Якщо серед елементів n-елементної множини M є n_1 елементів першого типу, n_2 елементів другого типу, … , n_k елементів k-го типу $(n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n)$, то кількість усіх перестановок такої множини позначається $P_n(n_1, n_2, \dots, n_k)$.

Теорема. Для перестановок з повтореннями має місце формула

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!}. \tag{2}$$

Формула (2) допускає також інше комбінаторне тлумачення: $P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) -$ це кількість способів, якими можна здійснити розбиття n-елементної множини M на k множин без спільних елементів.

Означення. **Комбінацією з повтореннями** з n елементів по k називається будь-який k-елементний набір виду $\{a_1,\ a_2, \dots, a_k\}$, де кожен з елементів a_1, $a_2, \dots, a_k$ належить до одного з n типів.

Позначається $\overline{\mathrm{C}_n^k}$.

Теорема. При довільних натуральних n і k має місце формула

$$\overline{\mathrm{C}_n^k} = \mathrm{C}_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}. \qquad (3)$$

5. Принцип включень та виключень

Нехай A і B дві скінченні множини. Кількість їх елементів позначається $N(A)$ і $N(B)$. Тоді $N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$.

Якщо $A \cap B = \emptyset$, тобто A і B не мають спільних елементів, то

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B).$$

За допомогою методу математичної індукції формулу можна узагальнити на випадок n множин. Для довільних скінченних множин $A_1, A_2, \dots, A_n$ має місце формула

$$N\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} N(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} N(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} N(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1} N(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n).$$

Цю формулу називають **формулою включень і виключень.**