Лекція 6. Відношення на множинах

План

1. Відношення на множинах. Типи відношень

2. Відношення еквівалентності та розбиття множини

3. Відношення порядку

1. Відношення на множинах. Типи відношень

Означення. **Відношенням** називається відповідність між елементами однієї і тієї ж множини.

Відношення як і відповідності зображуються у вигляді графа. Проте елементи множини зображуються один раз і розміщуються довільним чином.

Означення. Бінарне відношення α задане на множині A називається

- **рефлексивним** на A, якщо $\forall a \in A: a\alpha a$. Приклад: паралельність прямої на площині.
- **антирефлексивним** на A, якщо $\forall a \in A: \overline{a\alpha a}$. Приклад: перпендикулярність на множині усіх прямих площини.
- **нерефлексивним** на A, якщо $\exists a \in A: \overline{a\alpha a}$.

Особливість графа рефлексивного відношення є наявність петель у кожній вершині, у антирефлексивного немає жодної петлі, у нерефлексивного частина вершин мають петлі, а частина ні.

- **симетричним** на A, якщо $\forall a, b \in A: a\alpha b \to b\alpha a$. Приклад: паралельність на множині прямих.
- **асиметричним** на A, якщо $\forall a, b \in A: a\alpha b \to \overline{b\alpha a}$. Приклад: " $<$ " на множині натуральних чисел.
- **антисиметричним** на A, якщо $\forall a, b \in A: (a\alpha b \wedge b\alpha a) \to (a = b)$. Приклад: " $\leq$ " на множині натуральних чисел.

Особливість графа симетричного відношення – усі стрілки подвійні, асиметричного – усі стрілки напрямлені, антисиметричного – усі стрілки напрямлені і є петлі.

- **транзитивним** на A, якщо $\forall a, b, c \in A: (a\alpha b \wedge b\alpha c) \to (a\alpha c)$. Приклад: " $<$ " на множині натуральних чисел.

Особливість графа транзитивного відношення – трикутники відсутні або усі замкнені.

- **досконалим (зв'язним)** на A, якщо $\forall a, b \in A: (a \neq b) \to (a\alpha b \vee b\alpha a)$. Приклад: " $<$ " на множині натуральних чисел.

Особливість графа досконалого відношення – будь-які дві його різні вершини сполучені ребром.

Теорема 1. Нехай $|X| = n$. Число усіх бінарних відношень, які можна означити на множині X рівне 2^{n^2}.

Доведення. Задати бінарне відношення на множині X означає вказати деяку підмножину декартового добутку $X \times X$. Цей декартів добуток містить $n^2 -$ елементів. Тому число усіх підмножин 2^{n^2}.

Означення. Множину $D = \{(x, x): x \in X\}$ називають **діагональною.**

Теорема 2. Число усіх рефлексивних відношень на множині X рівне 2^{n^2-n}

Доведення. Кожне рефлексивне відношення містить діагональ D і ще деяку підмножину складену з елементів, які знаходяться «ззовні діагоналі». Число таких елементів $n^2 - n$. Тому і число рефлексивних відношень 2^{n^2-n}.

Теорема 3. Число усіх симетричних бінарних відношень, які можна визначити на множині X рівне $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Доведення. Графік симетричного відношення $\alpha \subset X \times X$ разом з парою $(x, x') \in \alpha,\ x \neq x'$ містить пару (x', x). Тому графік однозначно визначається, якщо вказати: а) які пари $(x, x) \in D \subset \alpha$ він містить, б) які пари $(x, x'), x \neq x'$ він містить. Число підмножин складених з пар виду а) рівне 2^n. Число підмножин складених з пар виду б) рівне $2^{C_n^2} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Число усіх симетричних відношень буде $2^n \cdot 2^{\frac{n(n-1)}{2}} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

2. Відношення еквівалентності та розбиття множини

Означення. Бінарне відношення α задане на множині A називається відношенням еквівалентності, якщо воно: рефлексивне, симетричне, транзитивне.

Приклад: відношення «бути паралельним» на множині прямих.

Особливості графа відношення еквівалентності:

1. у кожній вершині графа є петля.
2. Усі стрілки подвійні.
3. Усі наявні трикутники замкнуті.

Означення. Два цілі числа a, b називаються **порівнювані по модулю** m, якщо їх різниця ділиться на m

$$a \equiv b(mod\ m) \leftrightarrow ((a - b) \vdots m)$$

Можна довести, що відношення порівнювання по модулю m є відношенням еквівалентності на множині Z.

Означення. Елементи a, b, які належать множині A називаються еквівалентними, якщо $a\alpha\ b$.

Означення. **Класом еквівалентності**, який породжений елементом a, називається множина усіх елементів множини A, які еквівалентні елементу a.

Позначається $^{a}/_{\alpha}$ (клас еквівалентності породжений елементом a).

Означення. Множина усіх класів еквівалентності множини A за відношенням еквівалентності α називається **фактор-множиною**.

Позначається $^{A}/_{\alpha}$.

Означення. Множина $\mathfrak{M}$ непорожніх підмножин A називається **розбиттям множини *A* на класи**, якщо:

1) для $\forall X, Y \in \mathfrak{M}$: $X = Y$ або $X \cap Y = \emptyset$.
2) $\cup X = A, X \in \mathfrak{M}$.

Теорема 1. Фактор-множина множини A за відношенням еквівалентності α утворює розбиття множини A.

Теорема 2. Якщо $\mathfrak{M}$ – розбиття множини A, то існує відношення еквівалентності α на множині A таке, що $\mathfrak{M}$ співпадає з фактор-множиною $A/_{\alpha}$.

3. Відношення порядку

Означення. Бінарне відношення α задане на множині A називається **відношенням порядку**, якщо воно транзитивне і антисиметричне.

Означення. Відношення порядку називається **нестрогим (частковим)**, якщо воно рефлексивне.

Означення. Непорожня множина A із заданим на ній відношенням часткового порядку називається **частково впорядкованою множиною (ЧВМ).**

Означення. Елементи ЧВМ називаються **порівнюваними**, якщо

$$a \leq b \vee b \leq a.$$

Означення. Відношення часткового порядку на множині A називається **лінійним порядком**, якщо будь-які два елементи цієї множини є порівнювальними між собою.

Означення. Відношення порядку називається **строгим**, якщо воно антирефлексивне.

Теорема. Якщо відношення $\alpha -$ порядок строгий (нестрогий, лінійний), то обернене відношення α^{-1} порядок строгий (нестрогий, лінійний).