РОЗДІЛ 3. ВІДНОШЕННЯ НА МНОЖИНАХ

Лекція 5. Бінарні відповідності та їх типи

План

1. ***Поняття бінарної відповідності***
2. ***Способи задання відповідностей***
3. ***Типи відповідностей***
4. ***Операції над відповідностями***

1. *Поняття бінарної відповідності*

Означення. **Упорядкованою парою** називається двоелементна множина у якій вказано порядок слідування елементів. Позначається $\langle a, b\rangle$ або (a, b). Тут a − перша компонента, b − друга компонента.

Відмітимо, що $\{a, b\} = \{b, a\}$, але $(a, b) \neq (b, a)$.

Означення. $\big((a, b) = (c, d)\big) \leftrightarrow (a = c \wedge b = d)$.

Означення. **Прямим (декартовим) добутком** множини A на множину B називається множина усіх впорядкованих пар, першою компонентою яких є елемент з множини A, другою − елемент з множини B. Позначається $A \times B$.

$$A \times B = \{(a, b): a \in A \wedge b \in B\}.$$

Очевидно, що

$$A \times B \neq B \times A.$$

Означення. $A \times A$ − **декартів квадрат**.

Означення. **Кортежем довжини n (упорядкованою n -кою)** називається n елементна множина, у якій вказано порядок слідування елементів. Позначається $\langle a_1, a_2, \dots, a_n\rangle$ або $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Означення.

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n): a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \wedge \dots \wedge a_n \in A_n\}$$

називається **декартовим добутком довжини n**.

Означення. **Відповідністю** між множинами A і B називається будь-яка підмножина прямого добутку цих множин.

Відповідності позначаються малими буквами грецького алфавіту. Наприклад, $\alpha \subset A \times B$ (чит. альфа підмножина прямого добутку A на B) або $A \xrightarrow{\alpha} B$ (чит. A відображається в B у відповідності α).

Множину A називають **множиною відправлення**, множину B — **множиною прибуття.** Якщо між елементами пари (a, b) існує відповідність α, то символічно це записують $(a, b) \in \alpha$ або $a\alpha b$ (чит. a перебуває у відповідності альфа з b).

Означення. Множина усіх перших компонент відповідності α називається **областю визначення** (позначається $Dom\ \alpha$), множина усіх других компонент — **область значень** ($Im\ \alpha$).

2. Способи задання відповідностей

I. Переліком елементів

Існують такі форми переліку: матриця, граф, графік.

Наприклад. Нехай $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{3; 4; 5\}$.

Відповідність $\alpha = \{(1; 3), (1; 4), (3; 3), (3; 4)\}$.

Матриця відповідності має вигляд

A, B	3	4	5
1	1	1	0
2	0	0	0
3	1	1	0
4	0	0	0

Означення. Графом називається система точок (вершин графа) і стрілок (ребер графа), які сполучають деякі з цих точок. У графа від першої компоненти іде стрілка до другої.

II. Характеристичною властивістю

Характеристична властивість формується у вигляді речення з двома змінними.

Означення. Нехай маємо відповідність $A \xrightarrow{\alpha} B$. **Образом** елемента $a \in A$ називається множина тих $b \in B$, для яких пара $(a, b) \in \alpha$. Позначають $\alpha(a)$.

Прообразом елемента $b \in B$ називається множина тих $a \in A$ для яких $(a, b) \in \alpha$. Позначають $\alpha^{-1}(b)$.

3. Типи відповідностей

1) Порожня $\alpha = \emptyset$. Матриця такої відповідності складається лише з нулів, а граф має лише вершини.

2) Повна $\alpha = A \times B$. Матриця такої відповідності складається лише з одиниць, а у графа від кожної вершини першої множини іде стрілка до кожної вершини другої множини.

3) Сур'єктивна – це відповідність на всю множину прибуття

$$\alpha \subset A \times B \text{ і } \alpha(A) = B.$$

У графа такої відповідності до кожного елементу множини B іде стрілка.

4) Ін'єктивна $\alpha \subset A \times B$. Якщо $x \neq y$, то $\alpha(x) \neq \alpha(y)$. У графа такої відповідності до кожного елемента множини B іде одна стрілка.

5) Бієктивна – це сур'єктивна та ін'єктивна відповідності одночасно. Її ще називають взаємнооднозначною.

6) Функціональна – образи елементів з множини A або порожні, або містять лише по одному елементу.

4. Операції над відповідностями

Оскільки відповідності це множини, тому над ними виконуються ті ж операції, що й над множинами і ще дві специфічні: операція композиція та операція обертання.

Означення. **Доповненням** відповідності $\alpha \subset A \times B$ називають таку відповідність α' для якої виконується

$$\alpha' \cup \alpha = A \times B, \;\; \alpha' \cap \alpha = \emptyset$$

Означення. Композицією (добутком, суперпозицією) відповідностей $\alpha \subset A \times B$ і $\beta \subset B \times C$ називається відповідність $\gamma \subset A \times C,$ яка складається з тих пар (a, c), для яких існує елемент $b \in B$, такий, що $(a, b) \in \alpha$ і $(b, c) \in \beta$.

Можна показати, що

$$\alpha^\circ\beta \neq \beta^\circ\alpha$$

$$(\alpha^\circ\beta)^\circ\gamma = \alpha^\circ(\beta^\circ\gamma)$$

Окремим випадком композиції є функціональна відповідність.

Теорема. Композиція двох функціональних відповідностей є функціональна відповідність.

Означення. Композиція $\varphi^\circ\omega$ двох функціональних відповідностей називається **складною** функцією.

Означення. Оберненою до відповідності α називають відповідність α^{-1}, що складається з пар (y, x) таких, що $(x, y) \in \alpha$

$$\alpha^{-1} = \{\, (y, x) : (x, y) \in \alpha\}$$

Можна показати, що

$$(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$$

$$(\alpha^\circ\beta)^{-1} = \beta^{-1\circ}\alpha^{-1}$$