Тема 16. Визначений інтеграл

Теоретичні відомості

Визначений інтеграл функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]-$ це число, яке позначають $\int_a^b f(x)dx$. Тут $f(x)-$ підінтегральна функція; $[a,b]-$ відрізок інтегрування; $a,b-$ відповідно нижня та верхня межі інтегрування.

Визначений інтеграл обчислюється за формулою Ньютона-Лейбніца

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a),$$

де $F(x)-$ первісна функції $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$. Для знаходження первісної доцільно використати відповідний невизначений інтеграл

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Властивості визначеного інтеграла: а) сталий множник можна виносити з-під знака визначеного інтеграла; б) визначений інтеграл суми (різниці) двох функцій дорівнює сумі (різниці) визначених інтегралів кожної з цих функцій.

Якщо у визначеному інтегралі $\int_a^b f(x)dx$ вводиться нова змінна $\begin{cases} t = t(x) \\ dt = t'(x)dx \end{cases}$, то слід змінити межі інтегрування. Нижня межа інтегрування t_1 визначається як значення введеної змінної в точці $x = a$, а верхняя межа $t_2 -$ в точці $x = b$, тобто $\begin{cases} t_1 = t(a) \\ t_2 = t(b) \end{cases}$.

Обчислення визначених інтегралів методом інтегрування частинами полягає у використанні формули

$$\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du.$$

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$.

Розв'язання. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1.$

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int_0^1 (4x^3 - 3x^2 + 5x + 7)dx$.

Розв'язання.

$$\int_0^1 (4x^3 - 3x^2 + 5x + 7)dx = \left(4 \cdot \frac{x^4}{4} - 3 \cdot \frac{x^3}{3} + 5 \cdot \frac{x^2}{2} + 7x\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \left(x^4 - x^3 + 5 \cdot \frac{x^2}{2} + 7x\right)\Bigg|_0^1 = 1 - 1 + \frac{5}{2} + 7 - 0 = 9{,}5.$$

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}}$.

Розв'язання.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \mathrm{tg}\frac{x}{2}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = 2\mathrm{tg}\frac{x}{2}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = 2\mathrm{tg}0 - 2\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0 + 2 = 2.$$

Приклад 4. Знайти інтеграл $\int_0^2 \frac{2xdx}{x^2+1}$.

Розв'язання.

Введемо нову змінну $t = x^2 + 1$. Тоді $dt = (x^2 + 1)'dx = 2xdx$. Обчислимо нові межі інтегрування: $\begin{cases} t_1 = t(0) = 1 \\ t_2 = t(2) = 5 \end{cases}$. Маємо

$$\int_0^2 \frac{2xdx}{x^2 + 1} = \int_1^5 \frac{dt}{t} = \ln|t||_1^5 = \ln 5 - \ln 1 = \ln 5\,.$$

Приклад 5. Знайти інтеграл $\int_0^2 xe^{x^2} dx$.

Розв'язання.

Введемо нову змінну $t = x^2$. Тоді $dt = (x^2)'dx = 2xdx$. Обчислимо нові межі інтегрування: $\begin{cases} t_1 = t(0) = 0 \\ t_2 = t(2) = 4 \end{cases}$. Маємо

$$\int_0^2 xe^{x^2} dx = \int_0^4 e^t \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2}\int_0^4 e^t dt = \frac{1}{2} e^t\Big|_0^4 = \frac{1}{2}(e^4 - 1).$$

Приклад 6. Знайти інтеграл методом інтегрування частинами $\int_0^1 xe^x dx$.

Розв'язання.

$$\int_0^1 xe^x dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{vmatrix} = x \cdot e^x|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e + 1.$$

Питання для самоперевірки

1. Дати означення визначеного інтеграла.

2. Записати формулу Ньютона-Лейбніца.

3. Пояснити заміну змінної та метод інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

Вправи

1. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$; б) $\int_0^1 \left(2x - 3x^2 - \frac{1}{3}\right) dx$; в) $\int_2^5 \frac{dx}{x+1}$; г) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin 2x dx$.

Відповідь: а) 2; б) $-\frac{1}{3}$; в) $\ln 2$; г) $-0{,}5$.

2. Використовуючи заміну змінної обчислити:

а) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln^2 x} dx$; б) $\int_4^9 \frac{2}{\sqrt{x}+3} dx$; в) $\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}$; г) $\int_1^e \frac{4\ln^3 x}{x} dx$.

Відповідь: а) $\frac{1}{2}$; б) $4 - \ln\frac{36}{25}$; в) $\frac{\pi}{12}$ г)1.

3. Знайти інтеграли методом інтегрування частинами:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x + 1) \sin x dx$; б) $\int_0^1 \arcsin x \, dx$; $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx$.

Відповідь: а) 3; б) $\frac{\pi}{2} - 1$; в) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.