Тема 12. Диференціювання функцій: складної, заданої неявно та параметрично. Диференціал. Похідні вищих порядків. Обчислення границь функцій за правилом Лопіталя

Теоретичні відомості

Нехай $y = f[u(x)] -$ *складна функція*, тобто $y = f(u)$, де $u = u(x)$. Тут $u -$ проміжний аргумент, $x -$ незалежна змінні. Тоді $y' = f'(u)u'(x)$.

Правило. Похідна складеної функції дорівнює добутку похідної зовнішньої функції $f(u)$ по проміжному аргументу u і похідної внутрішньої функції $u(x)$ по незалежній змінній x.

Якщо кожному числу x множини X ставиться у відповідність єдине число y так, що пара чисел $(x; y)$ задовольняє рівняння $F(x, y) = 0$, то кажуть, що функцію $y = f(x)$, $x \epsilon X$, *задано неявно.*

Незважаючи на те, що рівняння $F(x, y) = 0$ не розв'язане відносно y, можна знайти похідну $y' = y'(x)$. Для цього потрібно:

1. обидві частини рівняння $F(x, y) = 0$ продиференціювати по x, вважаючи, що y є функцією від x;

2. одержане рівняння розв'язати відносно y'.

Нехай функція $y = f(x)$ задана *параметрично*

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \omega(t)' \end{cases} \qquad t - \text{параметр.}$$

Її похідна обчислюється

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Якщо функція $y = f(x)$ має похідну в точці x, то приріст функції $\Delta f(x)$ можна подати у вигляді

$$\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + o(\Delta x), \qquad \Delta x \to 0.$$

Диференціалом функції $y = f(x)$ в точці x називається вираз $f'(x)\Delta x$ і позначається $df(x)$ або dy. *Диференціалом незалежної змінної* x вважають її приріст Δx і позначають dx. Отже, диференціал функції обчислюють за формулою

$$dy = f'(x)dx.$$

При досить малих значеннях Δx

$$\Delta y \approx dy \text{ або } f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x.$$

Оскільки в цій формулі точка $x -$ фіксована, а Δx набуває будь-яких досить малих значень, то її можна переписати у вигляді

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x, \Delta x = x - x_0.$$

Даною формулою зручно користуватись тоді, коли відомо значення функції $f(x)$ в точці x_0 і треба знайти її значення в точці $x_0 + \Delta x$, де Δx досить мале.

Якщо функція $y = f(x)$ *диференційовна на* деякому *інтервалі* (тобто має похідну в кожній точці інтервалу), то за означенням *похідна другого порядку (друга похідна)* цієї функції знаходиться за формулою $y'' = (y')'$. Аналогічно *похідна третього порядку (третя похідна)* $y''' = (y'')'$ і т.д.

Правило Лопіталя

Правило Лопіталя використовують для знаходження границь диференційованих функцій, якщо є невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Нехай виконується співвідношення

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \text{ або } \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty,$$

де $a -$ число або один із символів $\pm\infty$. Тоді

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f'(x)}{\lim\limits_{x\to a} g'(x)},$$

якщо границя справа існує.

Правило Лопіталя можна застосовувати кілька разів. Аналогічне правило має місце і для односторонніх границь.

Приклади розв'язування вправ

Приклад 1. Знайти похідну складеної функції $y = \sqrt{x^2 + 5}$.

Розв'язання. Поклавши $u = x^2 + 5$, маємо $y = \sqrt{u}$. Тому

$$y' = \left(\sqrt{u}\right)' u' = \frac{1}{2\sqrt{u}} u' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+5}} (x^2+5)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+5}} 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}.$$

Можна було б відразу продиференціювати функцію, не вводячи проміжний аргумент:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+5}} 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}.$$

Приклад 2. Знайти похідну складеної функції $y = (5x^2 + 7x + 2)^3$.

Розв'язання. Поклавши $u = 5x^2 + 7x + 2$, одержимо $y = u^3$. Надалі будемо писати так: $y = u^3, u = 5x^2 + 7x + 2$.

$$y' = (u^3)' \cdot u' = 3(5x^2 + 7x + 2)^2 (5x^2 + 7x + 2)'$$
$$= 3(5x^2 + 7x + 2)^2 (10x + 7).$$

Приклад 3. Знайти похідну складеної функції $y = \sin 15x$.

Розв'язання. $y = \sin u,\ u = 15x$.

$$y' = (\sin u)' \cdot u' = \cos u \cdot u' = \cos 15x (15x)' = \cos 15x \cdot 15 = 15 \cos x.$$

Приклад 4. Знайти похідну складеної функції $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}, (x > 0)$.

Розв'язання. $y = \operatorname{arctg} u, u = \sqrt{x}$.

$$y' = (\operatorname{arctg} u)' \cdot u' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u' = \frac{1}{1+x} \cdot (\sqrt{x})' = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}.$$

Приклад 5. Знайти похідну складеної функції $y = \log_5(x^2 + 4)$.

Розв'язання. Після деякого числа вправ зручно відмовитись від введення проміжного аргументу u, розуміючи його в тих місцях, де він потрібен.

$$y' = \frac{1}{(x^2+4)\ln 5} (x^2+4)' = \frac{1}{(x^2+4)\ln 5} 2x = \frac{2x}{(x^2+4)\ln 5}.$$

Приклад 6. Знайти похідну неявної функції $5x + 3y - 7 = 0$.

Розв'язання. Продиференціюємо по x обидві частини рівняння, враховуючи, що y є функцією від x: $5 + 3y' = 0$.

Розвяжемо рівняння відносно y': $3y' = -5; y' = -\frac{5}{3}$.

Приклад 7. Знайти похідну неявної функції $y = tg(x + y)$.

Розв'язання. Знайдемо похідну

$$y' = \frac{1}{\cos^2(x+y)} \cdot (1+y').$$

Виразимо y':

$$y' = \frac{1}{\cos^2(x+y)} + \frac{y'}{\cos^2(x+y)}, \quad y'\left(1 - \frac{1}{\cos^2(x+y)}\right) = \frac{1}{\cos^2(x+y)},$$

$$y'\frac{\cos^2(x+y)-1}{\cos^2(x+y)} = \frac{1}{\cos^2(x+y)}, \quad y' = \frac{1}{\cos^2(x+y)-1}.$$

Приклад 8. Знайти похідну параметричної функції

$$\begin{cases} x = \operatorname{tg} t \\ y = \sin t \end{cases}.$$

Розв'язання. Маємо

$$x'_t = \frac{1}{\cos^2 t}, \quad y'_t = cost, \quad y' = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{cost}{\frac{1}{\cos^2 t}} = \cos^3 t.$$

Приклад 9. Знайти похідну параметричної функції

$$\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \operatorname{arctg} t \end{cases}.$$

Розв'язання.

$$x'_t = \frac{2t}{1+t^2}, \quad y'_t = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2}} = \frac{t^2(1+t^2)}{(1+t^2)2t} = \frac{t}{2}.$$

Приклад 10. Обчислити диференціали функцій:

а) $y = x^2$; б) $y = \sin x$.

Розв'язання.

а) $dy = (x^2)'dx = 2xdx$;

б) $dy = (\sin x)'dx = \cos x dx$.

Приклад 11. Замінюючи приріст функції диференціалом, наближено знайти $\operatorname{arctg} 0{,}97$.

Розв'язання. Нехай $\operatorname{arctg} 0{,}97$ є частинне значення функції $f(x) = \operatorname{arctg} x$ при $x = 0{,}97$.

Нехай $x_0 = 1$. Тоді $\Delta x = x - x_0 = 0{,}97 - 1 = -0{,}03$;

$$f(x_0) = f(1) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Диференціюючи $f(x) = \operatorname{arctg} x$, знаходимо $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

При $x_0 = 1$ $f'(1) = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}$. Застосовуючи формулу наближеного обчислення, одержимо

$$\operatorname{arctg} 0{,}97 \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(-0{,}03) \approx 0{,}785 - 0{,}015 = 0{,}77.$$

Приклад 12. $y = x^5 - 7x^3 + 2$; $y'''-?$

Розв'язання. Знайдемо спочатку y':

$$y' = 5x^4 - 21x^2;$$

$$y'' = (y')' = (5x^4 - 21x^2)' = 20x^3 - 42x;$$

$$y''' = (y'')' = (20x^3 - 42x)' = 60x^2 - 42.$$

Приклад 13. Знайти границі функцій використовуючи правило Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2\ln x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{x^2}$.

Розв'язання.

а) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2\ln x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x^2-1)'}{(2\ln x)'} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{2x}{2\cdot\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1.$

б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(1-\cos 3x)'}{(x^2)'} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3\sin 3x}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{(3\sin 3x)'}{(2x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{9\cos 3x}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5.$

Приклад 14. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}(x^3 \ln x)$.

Розв'язання. Тут маємо невизначеність вигляду $[0 \cdot \infty]$. Зобразимо добуток функції у вигляді частки, а потім, отримавши невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}(x^3 \ln x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to 0} \frac{(\ln x)'}{(x^{-3})'} = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3}{x^4}} = -\frac{1}{3}\lim_{x\to 0} x^3 = 0.$$

Приклад 15. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $[\infty-\infty]$. Алгебраїчним перетворенням приведемо цю невизначеність до невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$, а потім двічі застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0.$$

Питання для самоперевірки

1. Яку функцію називають складною?

2. Згадайте правило диференціювання складної функції.

3. Яку функцію називають заданою неявно? Навести приклади.

4. У чому полягає правило диференціювання функції, заданої неявно?

5. Яка функція називається заданою параметрично?

6. Що називається диференціалом функції?

7. Пригадайте формулу для знаходження диференціала функції.

8. Запишіть формулу, яку використовують для наближених обчислень за допомогою диференціала.

9. Що називається другою похідною або похідною другого порядку функції $y=f(x)$?

10. Як знаходиться похідна n −го порядку функції $y=f(x)$?

11. Сформулюйте правило Лопіталя.

Вправи

Обчислити похідні складених функцій:

1. $y=\sqrt{x^2+2}$. **Відповідь:** $\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$.

2. $y=\sqrt[3]{x^2+\cos x}$. **Відповідь:** $\frac{2x-\sin x}{3\sqrt[3]{(x^2+\cos x)^2}}$.

3. $y = \cos 9x$. **Відповідь:** $-9\sin 9x$.

4. $y = \arccos\frac{3x-1}{\sqrt{5}}$. **Відповідь:** $-\frac{3}{\sqrt{4+6x-9x^2}}$.

Обчислити похідні неявних функцій:

5. $5x^2 + 3xy - 2y^2 + 2 = 0$. **Відповідь:** $\frac{10x+3y}{4y-3x}$.

6. $y^5 - 5axy + x^5 = 0$. **Відповідь:** $\frac{ay-x^4}{y^4-ax}$.

7. $y = \cos(x + y)$. **Відповідь:** $-\frac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$.

8. $y = x + \operatorname{arctg} y$. **Відповідь:** $\frac{1+y^2}{y^2}$.

Обчислити похідні параметричних функцій:

9. $\begin{cases} x = a(1-t) \\ y = a\,t \end{cases}$. **Відповідь:** -1.

10. $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$. **Відповідь:** $\operatorname{tg} t$.

11. $\begin{cases} x = \frac{1-t}{1+t} \\ y = \frac{2t}{1+t} \end{cases}$. **Відповідь:** -1.

12. Обчислити диференціали функцій:

а) $y = x$; б) $y = \ln x$.

Відповідь: а) dx; б) $\frac{dx}{x}$.

13. Обчислити похідні вищих порядків:

а) $y = (1 + x^2)\operatorname{arctg} x$; y'''–?

Відповідь: $\frac{2x}{1+x^2} + 2\operatorname{arctg} x$.

б) $y = \cos^2 x$; y'''–?

Відповідь: $4\sin 2x$.

в) $y = \frac{1}{1-x}$; $y^{(5)}$–?

Відповідь: $y = \frac{5!}{(1-x)^6}$.

14. Знайти границі функцій, використовуючи правило Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3-4x^2+4x}{x^3-12x+16}$.

Відповідь: $\frac{1}{3}$.

б) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^3}{\ln x}$.

Відповідь: ∞.

в) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$.

Відповідь: 2.

г) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x}$.

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

15. Замінюючи приріст функції диференціалом, наближено знайти:

а) $\operatorname{arctg} 1{,}02$.

Відповідь: 0,795.

б) $\arcsin 0{,}4983$.

Відповідь: 0,52164.

в) $e^{0{,}2}$.

Відповідь: 1,2.

г) $\ln 0{,}97$.

Відповідь: $-0{,}03$.