Лекція 17. Визначений інтеграл

План

1. ***Означення визначеного інтеграла***
2. ***Властивості визначеного інтеграла***
3. ***Інтеграл зі змінною верхньою межею***
4. ***Формула Ньютона-Лейбніца***
5. ***Метод заміни змінної у визначеному інтегралі***
6. ***Метод інтегрування частинами***

1. Означення визначеного інтеграла

Нехай функція $y=f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$, $a<b$. Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n довільних частин так, щоб

$$a=x_0<x_1<x_2<...<x_{i-1}<x_i<...<x_{n-1}<x_n=b.$$

Сукупність точок $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ назвемо T-розбиттям відрізка $[a;b]$ на частини. Для кожного з частинних відрізків визначимо його довжину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} (i=0,1,...,n-1)$ та значення функції $f(\xi_i)$ у довільній точці $\xi_i \in [x_{i-1};x_i]$. Позначимо через λ – найбільшу довжину серед довжин частинних відрізків, тобто $\lambda = \max\limits_{0\le i\le n-1} \Delta x_i$. Утворимо суму $\sigma_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i$, яка називається *інтегральною сумою* функції $y=f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

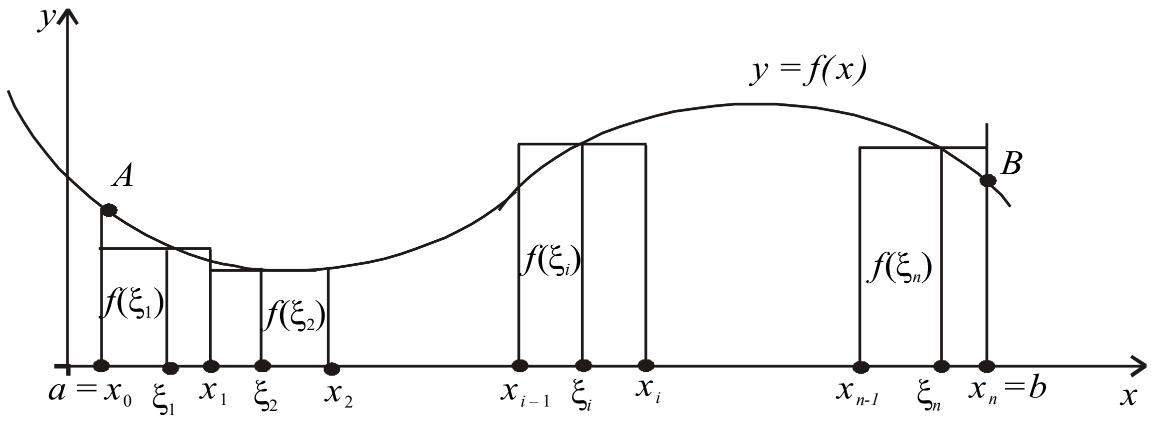
Означення 1. Якщо існує скінченна границя інтегральних сум σ_n при $\lambda\to 0$, яка не залежить ні від способу розбиття відрізка $[a;b]$ на частини Δx_i, ні від вибору точок ξ_i у кожному з частинних відрізків, то вона називається *визначеним інтегралом* функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ і позначається символом $\int\limits_a^b f(x)dx$. Отже, згідно з означенням,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot\Delta x_i .$$

Числа a і b називають відповідно нижньою та верхньою межами інтегрування; функція $f(x)$ – підінтегральна функція; $f(x)dx$ – підінтегральний вираз; dx – диференціал змінної інтегрування.

Означення 2. Функція, для якої на $[a;b]$ існує визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ називається *інтегровною на цьому проміжку*.

Геометричний зміст визначеного інтеграла полягає в тому, що визначений інтеграл від невід'ємної та інтегровної на відрізку $[a;b]$ функції чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y=f(x)$, відрізками прямих $x=a$, $x=b$ та віссю Ox:



Необхідною умовою існування визначеного інтеграла є обмеженість функції $f\left(x\right)$ на відрізку $\left[a;b\right]$.

Достатньою умовою існування визначеного інтеграла є неперервність функції $f\left(x\right)$ на цьому ж відрізку.

2. Властивості визначеного інтеграла

I. Якщо $f(x)=c=\text{const}$, то $\int\limits_a^b c\,dx = c\cdot(b-a)$.

II. Сталий множник можна виносити з-під знака визначеного інтеграла, тобто $\int\limits_a^b c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

III. Якщо $f_1(x)$ та $f_2(x)$ інтегровні на $\left[a;b\right]$, то

$$\int\limits_a^b \left(f_1(x)\pm f_2(x)\right)dx = \int\limits_a^b f_1(x)\,dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)\,dx.$$

IV. Якщо у визначеному інтегралі поміняти місцями межі інтегрування, то інтеграл змінить лише свій знак на протилежний, тобто

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx.$$

V. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$.

VI. Якщо $f(x)$ — інтегровна в будь-якому із проміжків: $\left[a;b\right]$, $\left[a;c\right]$, $\left[c;b\right]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$.

VII. Якщо $f(x)\geq 0$ і інтегровна для $x\in[a,b],\quad b>a,$ то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

VIII. Якщо $f(x)$, $g(x)$ – інтегровні та $f(x) \geq g(x)$ для $x \in [a, b], \quad b > a$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq \int\limits_a^b g(x)\,dx.$

IX. Якщо $f\left(x\right)$ – інтегровна та $m \leq f(x) \leq M$ для $x \in [a,\ b], \quad b > a$, то

$$m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

X. **Теорема (про середнє):** Якщо функція $f\left(x\right)$ – неперервна для $x \in [a,\ b], \quad b > a$, то знайдеться така точка $x = c \in [a,\ b]$, що:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)$$

3. Інтеграл зі змінною верхньою межею

Нехай функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $\left[a;b\right]$. Тоді вона інтегровна і на будь-якому відрізку $\left[a;x\right]$, де $a \leq x \leq b$, тобто для будь-якого $x \in \left[a;b\right]$ має зміст інтеграл $\int\limits_a^x f(t)dt$.

Розглянемо функцію

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$$

Ця функція визначена на відрізку $\left[a;b\right]$ і називається *інтегралом зі змінною верхньою межею*.

Теорема 1. Похідна інтеграла від неперервної функції по змінній верхній межі існує і дорівнює значенню підінтегральної функції в точці, що дорівнює верхній межі, тобто

$$\Phi'(x) = \left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$$

4. Формула Ньютона-Лейбніца

Теорема 2. (Основна теорема інтегрального числення). Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $\left[a;b\right]$. Якщо функція $F(x)$ є довільною її первісною на цьому відрізку, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Ця формула називається *формулою Ньютона-Лейбніца*.

Приклад.

$$\int\limits_1^2 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

5. Метод заміни змінної у визначеному інтегралі

Теорема. Якщо: 1) $f(x)$ – неперервна для $x \in [a; b]$; 2) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$; 3) $\varphi(t)$ та $\varphi'(t)$ – неперервні для $t \in [\alpha; \beta]$; 4) при $t \in [\alpha; \beta] \Rightarrow x \in [a; b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left| \begin{array}{c} x = \varphi(t), \\ dx = \varphi'(t)\,dt; \\ \begin{array}{c|c|c} x & a & b \\ \hline t & \alpha & \beta \end{array} \end{array} \right| = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\,dt.$$

Зауваження. При заміні змінної інтегрування у визначеному інтегралі змінюються межі інтегрування, і тому нема потреби повертатись до початкової змінної.

Приклад. $\displaystyle\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \left| \begin{array}{c} x = t^2, \;\; dx = 2tdt \\ \begin{array}{c|c|c} x & 4 & 9 \\ \hline t & 2 & 3 \end{array} \end{array} \right| = \int_2^3 \frac{2tdt}{t+1} = 2\int_2^3 \frac{t+1-1}{t+1}\,dt =$

$$= 2\int_2^3 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = 2\big(t - \ln|t+1|\big)\Big|_2^3 = 2\big(3 - \ln 4 - (2 - \ln 3)\big) = 2\left(1 + \ln\frac{3}{4}\right).$$

6. Метод інтегрування частинами

Теорема. Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ мають неперервні похідні для $x \in [a; b]$, то

$$\int_a^b u\,dv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Приклад.

$$\int_1^e \ln x\,dx = \left| \begin{array}{c} u = \ln x, du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx, v = x \end{array} \right| = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x\frac{dx}{x} = e - x\Big|_1^e = 1.$$