Лекція 15. Невизначений інтеграл

План

1. Поняття первісної
2. Властивості невизначеного інтеграла
3. Основні методи інтегрування

1. Поняття первісної

Функція $F(x)$ називається *первісною* для функції $f(x)$ на проміжку $(a;b)$ якщо для кожного $x\in(a;b)$ виконується рівність $F'(x)=f(x)$.

Приклад. Функція $F(x)=\sin x$ є первісною для функції $f(x)=\cos x$ на $X=(-\infty,+\infty)$, тому що при будь-якому x: $(\sin x)'=\cos x$.

Якщо $F(x)$ – первісна для $f(x)$, то функція $F(x)+C$, де C – деяка стала, також є первісною для функції $f(x)$, тому що $\left[F(x)+C\right]'=f(x)$ для будь-якого числа C. Наприклад, для $f(x)=\cos x$ первісної є не тільки $\sin x$, але й функція $\sin x+C$, тому що $(\sin x+C)'=\cos x$.

Означення. Якщо функція $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$, то множина функцій $F(x)+C$, де C – довільна стала, називається *невизначеним інтегралом від функції* $f(x)$ й позначається символом

$$\int f(x)dx=F(x)+C.$$

При цьому функція $f(x)$ називається *підінтегральною функцією,* $f(x)dx$ – *підінтегральним виразом,* а dx – *диференціал змінної інтегрування*.

Операція знаходження первісних для функції $f(x)$ називається *інтегруванням* $f(x)$. Інтегрування – операція, обернена диференціюванню.

Задача інтегрування функції на проміжку полягає у тому, щоб знайти всі первісні функції на цьому проміжку, або довести, що їх немає.

Теорема (Коші). Для існування невизначеного інтеграла для функції $f(x)$ на певному проміжку достатньо, щоб $f(x)$ була неперервною на цьому проміжку.

2. Властивості невизначеного інтеграла

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)'=f(x).$

2. $d\left(\int f(x)\,dx\right)=f(x)\,dx.$

3. $\int dF(x)=F(x)+C.$

4. $\int kf(x)\,dx=k\int f(x)\,dx.$

5. $\int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx.$

3. Основні методи інтегрування

Безпосереднє інтегрування. Обчислення інтегралів за допомогою таблиці найпростіших інтегралів й основних властивостей невизначених інтегралів називається *безпосереднім інтегруванням.*

Таблиця невизначених інтегралів

1. $\int dx = x + C$;

2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$;

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

4. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$;

5. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{|a|} + C, \quad a \neq 0$;

6. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1$; $\quad \int e^x dx = e^x + C$;

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

8. $\int \cos x dx = \sin x + C$;

9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$;

10. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$;

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C, \quad a \neq 0$;

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C, \quad a \neq 0$;

13. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad a \neq 0$.

Метод безпосереднього інтегрування. Коли $\varphi(x)$ є лінійною функцією, тобто $\varphi(x) = ax + b,$, дістаємо:

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)\cdot d(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b) + C..$$

Зауваження. Під знак диференціала можна вносити будь-який сталий доданок (значення диференціала при цьому не зміниться):

Приклад. $\int \dfrac{\sin x dx}{1+3\cos x} = \int \dfrac{d(-\cos x)}{1+3\cos x} = -\dfrac{1}{3}\int \dfrac{d(3\cos x)}{1+3\cos x} =$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{d(1+3\cos x)}{1+3\cos x} = -\frac{1}{3}\ln|1+3\cos x| + C.$$

Метод підстановки (заміна змінної інтегрування). Мета методу підстановки – перетворити даний інтеграл до такого вигляду, який простіше інтегрувати.

Теорема . Якщо $f(x)$ – неперервна, а $x=\varphi(t)$ має неперервну похідну, то:

$$\int f(x)dx = \left| \begin{array}{l} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)dt; \\ t=\varphi^{-1}(x) \end{array} \right| = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Наслідок.

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = |\varphi(x)=t| = \int f(t)dt.$$

Приклад.

$$\int \sin^5 x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{1}{6}\sin^6 x + C.$$

Метод інтегрування частинами. Формулою інтегрування частинами у невизначеному інтегралі називається формула

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

де u й v – диференцфійовні функції по x.

На практиці функції $u(x)$ та $v(x)$ рекомендується вибирати за таким правилом: при інтегруванні частинами підінтегральний вираз $f(x)dx$ розбивають на два множники типу $u \cdot dv$, тобто $f(x)dx = u \cdot dv$; при цьому функція $u(x)$ вибирається такою, щоб при диференціюванні вона спрощувалась, а за dv беруть залишок підінтегрального виразу, який містить dx, інтеграл від якого відомий, або може бути просто знайдений.

Приклад.

$$\int x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u=x,\ du=dx \\ dv=\sin x dx \Rightarrow \\ \Rightarrow \int dv = \int \sin x dx \Rightarrow \\ \Rightarrow v=-\cos x \end{array} \right| = -x\cos x - \int -\cos x dx = -x\cos x + \sin x + C.$$