

Лекція 14. Застосування похідної до дослідження властивостей функції.

План

1. Ознака монотонності функції

2. Точки екстремуму

3. Необхідні й достатні умови існування екстремуми функції

4. Знаходження найбільшого й найменшого значення функції на відрізьку

1. Ознака монотонності функції

Теорема. Якщо функція $f(x)$ диференційована на інтервалі (a, b) і $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) на (a, b) , то функція $f(x)$ зростає (спадає).

2. Точки екстремуму

Точка x_0 називається точкою локального максимуму (мінімуму) функції $f(x)$, якщо існує δ – окіл $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 такий, що $f(x_0) > f(x)$ ($f(x_0) < f(x)$) для будь-якої відмінної від x_0 точки $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. При цьому саме значення $f(x_0)$ називається локальним максимумом (мінімумом) функції $f(x)$.

Точки максимуму і мінімуму функції $f(x)$ називаються точками екстремуму або екстремальними точками функції.

3. Необхідні й достатні умови існування екстремуми функції

Необхідна умова існування локального екстремуму функції. Якщо в точці x_0 функція $f(x)$ має екстремум, то існує окіл $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 , в якому значення $f(x_0)$ є найбільшим або найменшим. Отже, якщо в точці x_0 функція $f(x)$ диференційована, то згідно теореми Ферма $f'(x_0) = 0$.

Зазначимо, що коли функція $f(x)$ диференційована в точці x_0 і $f'(x_0) \neq 0$, то або $f'(x_0) > 0$, тобто функція зростає, або $f'(x_0) < 0$ і функція спадає. Звідси випливає, що функція $f(x)$ може мати екстремум лише в тих точках, у яких її похідна рівна нулю, або не існує.

Точки, в яких похідна функції рівна нулю, називаються *стаціонарними*. Стаціонарні точки й точки, в яких функція визначена, але її похідна не існує називаються *критичними*.

Отже, для того, щоб функція $f(x)$ мала в точці x_0 екстремум, необхідно, щоб ця точка була критичною.

Теорема (достатні умови існування екстремуму функції) Нехай x_0 – критична точка функції $f(x)$, $f(x)$ неперервна в точці x_0 і має похідну $f'(x)$ в усіх точках околу $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ за виключенням, можливо самої точки x_0 .

Тоді

1) якщо $f'(x) > 0$ для $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ і $f'(x) < 0$ для $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то точка x_0 є точкою максимуму функції $f(x)$.

2) Якщо $f'(x) < 0$ для $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ і $f'(x) > 0$ для $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то точка x_0 є точкою мінімуму функції $f(x)$.

3) Якщо $f'(x)$ в околі $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ має один і той же знак, то x_0 не є точкою екстремуму функції $f(x)$.

Із сказаного випливає правило дослідження функції на екстремум. Щоб дослідити функцію $f(x)$ на екстремум треба:

1. Знайти область визначення функції.
2. Знайти $f'(x)$ – першу похідну функції $f(x)$.
3. Розв'язати рівняння $f'(x) = 0$ та визначити ті значення x , при яких $f'(x) = \infty$ або $f'(x)$ не існує. Нехай після виконання цих дій одержано точки $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, які знаходяться в інтервалі (a, b) області визначення функції.

4. У кожному з інтервалів $(a, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n)$ взяти довільну точку і визначити в ній знак першої похідної. Який знак матиме похідна у вибраній точці, такий же знак вона матиме й у відповідному інтервалі.

5. Розглянути знак $f'(x)$ у сусідніх інтервалах, переходячи послідовно зліва направо від першого інтервалу до останнього. Якщо при цьому знаки $f'(x)$ у двох сусідніх інтервалах різні. То в критичній точці є екстремум: максимум, якщо знак змінюється з “+” на “-”, мінімум, якщо знак змінюється з

“-“ на “+”. Якщо ж у двох сусідніх інтервалах знак першої похідної не змінюється. То екстремуму у відповідній критичній точці немає.

Приклад. Дослідити на екстремум функцію $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$.

1. Функція визначена в інтервалі $(-\infty, +\infty)$.

2. $y' = x^3 - 2x^2 - 3x$.

3. Розв'язками рівняння $x^3 - 2x^2 - 3x = 0$ є $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 3$.

4. В інтервалі $(-\infty, -1)$ $y' < 0$, функція спадає; в інтервалі $(-1, 0)$ $y' > 0$, функція зростає; інтервалі $(0, 3)$ $y' < 0$, функція спадає; в інтервалі $(3, \infty)$ $y' > 0$, функція зростає.

5. Точки $x_1 = -1, x_3 = 3$ є точками мінімуму, а точка $x_2 = 0$ є точкою максимуму даної функції.

6. $y_{\min} = 1\frac{5}{12}; y_{\min} = -9\frac{1}{4}; y_{\max} = 2$.

Теорема. Нехай x_0 – стаціонарна точка функції $f(x)$ і в цій точці існує похідна другого порядку $f''(x) \neq 0$. Тоді, якщо $f''(x) > 0$, то точка x_0 є точкою мінімуму функції $f(x)$, а якщо $f''(x) < 0$, то – максимуму.

Теорема. Якщо в стаціонарній точці x_0 функції $f(x)$ перша відмінна від нуля похідна $f^{(n)}(x_0)$ є похідною парного порядку, то точка x_0 є точкою екстремуму функції: точкою мінімуму, якщо $f^{(n)}(x_0) > 0$ і точкою максимуму, якщо $f^{(n)}(x_0) < 0$. Якщо ж перша відмінна від нуля похідна $f^{(n)}(x_0)$ є похідною непарного порядку, то точка x_0 не є точкою екстремуму функції.

4. Знаходження найбільшого й найменшого значення функції на відрізку

Для знаходження найбільшого й найменшого значення функції $f(x)$, неперервної на відрізку $[a, b]$, потрібно знайти всі її локальні екстремуми на цьому відрізку та її значення на кінцях відрізка, тобто $f(a), f(b)$. Потім з одержаних значень вибрати найменше й найбільше.