Тема 12. Диференціал функції, його застосування в наближених обчисленнях

Нагадаємо, що функція $f(x)$ називається *диференційованою в точці* x_0, якщо в околі цієї точки приріст функції можна подати у вигляді

$$\Delta f\left(x_0\right) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = \mathrm{A}\cdot\Delta\mathrm{x} + \alpha\cdot\Delta\mathrm{x} = f'\left(x_0\right)\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta\mathrm{x},$$

де α – нескінченно мала, при $\Delta x \to 0$.

Вираз $\mathrm{A}\cdot\Delta\mathrm{x} = f'\left(x_0\right)\cdot\Delta x$ називається лінійною частиною приросту функції.

Лінійну частину приросту функції називають диференціалом функції і позначають $df(x)$ або dy, тобто

$$dy = f'(x)\Delta x. \tag{1}$$

З огляду на те, що диференціал незалежної змінної збігається з її приростом Δx, формулу для диференціала (1) можна записати так:

$$dy = f'(x)dx.$$

Якщо врахувати властивості похідних, одержимо такі властивості диференціала:

1. $y = c$; $dy = 0$;
2. $y = uv,\quad dy = udv + vdu$;
3. $y = u + v,\quad dy = du + dv$;
4. $y = \dfrac{u}{v},\quad dy = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$.

Якщо замінити $\Delta f\left(x_0\right)$ на $df\left(x_0\right)$, одержимо наступну рівність:

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + df\left(x_0\right) \tag{2}$$

Саме рівністю (2) користуються при наближених обчисленнях.

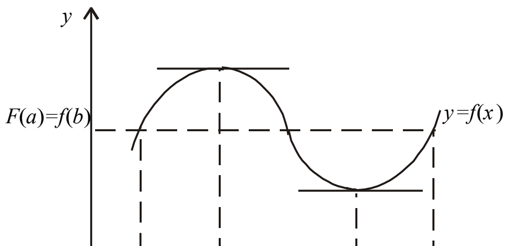
4. Основні теореми диференціального числення

Теорема Ферма. Якщо диференційовна на проміжку D функція $y = f\left(x\right)$ досягає найбільшого або найменшого значення у внутрішній точці x_0 цього проміжку, то похідна функції в цій точці дорівнює нулю, тобто $f'\left(x_0\right) = 0$.

Торема Ролля. Нехай функція $f(x)$ задовольняє умовам:

1) $f(x)$ неперервна на $[a;b]$;
2) $f(x)$ диференційована на $(a;b)$;
3) $f(a) = f\left(b\right) = 0$,

тоді існує хоча б одна точка c є $(a;b)$ така, що $f'(x) = 0$.

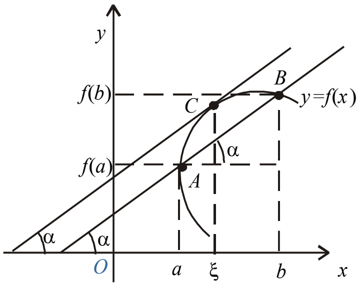


Теорема Лагранжа (про скінченні прирости). Нехай функція *f(x)* задовольняє умовам:

1) $f(x)$ неперервна на $[a;b]$;

2) $f(x)$ диференційована на $(a;b)$.

Тоді існує точка $c \in (a;b)$ така, що $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.



Теорема Коші. Якщо $f(x)$ і $\varphi(x)$ дві функції: 1) неперервні на сегменті $[a;b]$; 2) диференційовні на інтервалі $(a;b)$; 3) $\varphi'(x) \neq 0$ для $x \in (a;b)$, то на інтервалі $(a;b)$ знайдеться хоча б одна точка $x = c$ $(a < c < b)$, така що

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$