РОЗДІЛ. ВСТУП ДО ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Лекція 10. Комплексні числа і дії щодо них

План

1. Алгебраїчна форма комплексного числа

2. Геометричне зображення комплексних чисел

3. Тригонометрична форма комплексного числа

4. Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі

5. Дії над комплексними числами в тригонометричній формі

1. Алгебраїчна форма комплексного числа

Комплексним числом z називається вираз $z = x + iy$, де x і y – будь-які дійсні числа, а i – уявна одиниця, яку визначено рівністю $i^2 = -1$.

Задання комплексного числа у вигляді $z = x + iy$ називається *алгебраїчною формою комплексного числа*. Число x називається *дійсною частиною*, а y – *уявною частиною* числа z, їх позначають так: $x = Re(z)$; $y = Im(z)$.

Два комплексних числа, задані в алгебраїчній формі, називаються *рівними* тоді і тільки тоді, коли рівні відповідно їх дійсні і уявні частини.

2. Геометричне зображення комплексних чисел

Якщо на площині введена декартова прямокутна система координат, то кожному комплексному числу $z = x + iy$ може бути поставлена у відповідність точка $M(x, y)$ з абсцисою x і ординатою y. Навпаки, кожній точці $M(x, y)$ площини відповідає комплексне число $z = x + iy$.

Площина, на якій зображаються комплексні числа, називається *комплексною площиною* Z. Очевидно, дійсні числа $z = x + i0$ $(y = 0)$ зображаються точками осі Ox, а уявні $z = 0 + iy$ $(x = 0)$ – точками, що лежать на осі Oy. Тому вісь Ox називається дійсною віссю, а вісь Oy – уявною віссю.

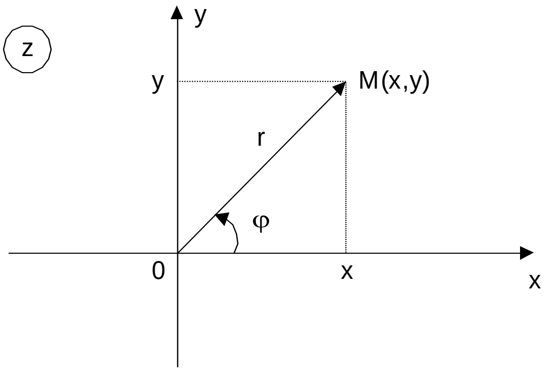

Рис. 16

Дійсній і уявній частинам комплексного числа можна також поставити у відповідність координати вектора $\overrightarrow{OM}$ – радіуса-вектора точки $M(x, y)$, що зображає це число.

У деяких випадках зручно вважати геометричним зображенням числа $z = x + iy$ вектор $\overrightarrow{OM}$ (чи будь-який вектор, що дорівнює вектору $\overrightarrow{OM}$).

3. Тригонометрична форма комплексного числа

Введемо на комплексній площині Z полярну систему координат так, що полюс збігається з початком координат, а полярна вісь – з додатною піввіссю Ox. Тоді точка $M(x, y)-$ образ комплексного числа $z = x + iy$ має полярні координати $\rho = |\overrightarrow{OM}|$ і $\varphi-$ кут між додатним напрямком осі Ox і вектором $\overrightarrow{OM}$.

Тоді, як відомо, $x = \rho cos\varphi$, $y = \rho sin\varphi$, а, отже, комплексне число z можна представити у формі

$$z = \rho(cos\varphi + isin\varphi).$$

Таке зображення називається *тригонометричною формою* комплексного числа z, ρ називається *модулем* комплексного числа z, φ – *аргументом*, що відповідно позначаються $\rho = |z|$, $\varphi = Argz$.

За означенням модуля й аргументу випливає

$$|z| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, tg(Arg\ z) = tg\varphi = \frac{y}{x},\ sin\varphi \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$Arg\ z$ визначається не однозначно, а з точністю до доданка, кратного 2π:

$$Argz = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

де $\arg z$ є головне значення $Arg\, z$, обумовлене нерівністю $-\pi \leq \arg z \leq \pi$, причому

$$\arg z = \begin{cases} arctg\frac{y}{x}, \;\; x > 0 \\ \pi + arctg\frac{y}{x}, \;\; x < 0, y > 0 \\ -\pi + arctg\frac{y}{x}, \;\; x < 0, y < 0 \end{cases}$$

4. Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі

Додавання і множення комплексних чисел виконується за правилами додавання і множення алгебраїчних многочленів. Записуючи результати дій, зроблених над комплексними числами, варто відокремити дійсну частину від уявної.

Нехай $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$, то

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2);$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 =$$
$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2).$$

Різниця визначається як дія, зворотня додаванню:

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

Отже, при додаванні і відніманні комплексних чисел додаються і віднімаються відповідно їх дійсні і уявні частини.

Числа $z = x + iy$ і $\bar{z} = x - iy$ називаються *взаємно спряженими*. Для спряжених комплексних чисел:

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Ділення комплексних чисел означається як дія, зворотня множенню, а саме:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} =$$
$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

5. Дії над комплексними числами в тригонометричній формі

Нехай $z_1 = \rho_1(cos\varphi_1 + isin\varphi_1), z_2 = \rho_2(cos\varphi_2 + isin\varphi_2)$. Тоді

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 (cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Отже,

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \qquad Arg\,(z_1 z_2) = Arg\,z_1 + Arg\,z_2.$$

З правила множення комплексних чисел, поданих у тригонометричній формі, випливає правило піднесення комплексного числа до натурального степеня n:

$$z^n = (\rho(cos\varphi + isin\varphi))^n = \rho^n(cos\,n\varphi + isin\,n\varphi).$$

Добудемо корінь n −го степеня із числа $z = \rho(cos\varphi + isin\varphi)$:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + isin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), (k = 0,1,2, \dots, n-1).$$