Лекція 7. Пряма і площина у просторі

План

1. ***Різні види рівняння площини***
2. ***Кут між двома площинами. Умова паралельності і перпендикулярності двох площин***
3. ***Різні види рівнянь прямої***
4. ***Кут між двома прямими***
5. ***Кут між прямою і площиною***

1. Різні види рівняння площини

Нехай в прямокутній системі координат $Oxyz$ задано площину П точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і вектором $\vec{n} = (A, B, C)$, перпендикулярним до цієї площини. Виберемо на площині П довільну точку $M(x, y, z)$. При будь-якому положенні точки M вектори $\vec{n}$ і $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ є взаємно перпендикулярними, тому їх скалярний добуток рівний нулю

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0; \qquad (1)$$

(1) – *рівняння площини, що проходить через точку* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *і має вектор нормалі* $\vec{n} = (A, B, C)$. Або

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (2)$$

де $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Рівнянн (2) – *загальне рівняння площини.* Вектор $\vec{n} = (A, B, C) -$ *вектор нормалі.* Можливі випадки:

а) $D = 0 -$ площина проходить через початок координат;
б) $C = 0 -$ площина паралельна осі Oz;
в) $C = D = 0 -$ площина проходить через вісь Oz;
г) $B = C = 0 -$ площина паралельна площині Oyz.

Рівняння площини у відрізках на осях $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Рівняння площини, що проходить через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, які не лежать на одній прямій

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Кут між двома площинами. Умова паралельності і перпендикулярності двох площин

Величину кута φ між площинами $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ обчислюють

$$cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}, \qquad (3)$$

де $\overrightarrow{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$, $\overrightarrow{n_2} = (A_2, B_2, C_2) -$ нормальні вектори даних площин. Умова перпендикулярності двох площин – $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$; умова паралельності – $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$. Дві площини збігаються, якщо виконується умова $-\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$.

3. Різні види рівнянь прямої

Залежно від способу задання прямої в просторі можна розглядати різні її рівняння.

1. Рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_o,y_o,z_0)$ паралельно вектору $\vec{s}(m,n,p)$. Нехай $M(x,y,z)$ – довільна точка прямої, тоді $\overrightarrow{M_0M}\,||\,\vec{s}$ і пряма лінія на площині може бути задана векторним рівнянням у параметричній формі

$$\vec{r}(t)=\overrightarrow{r_0}+\vec{s}t, \tag{4}$$

де $\vec{s}$ – напрямний вектор прямої l, $\overrightarrow{r_0}$ – радіус-вектор фіксованої точки $M_0(x_o,y_o,z_0)$ на прямій, $\vec{r}(t)$ – радіус-вектор довільної точки на прямій, t – параметр.

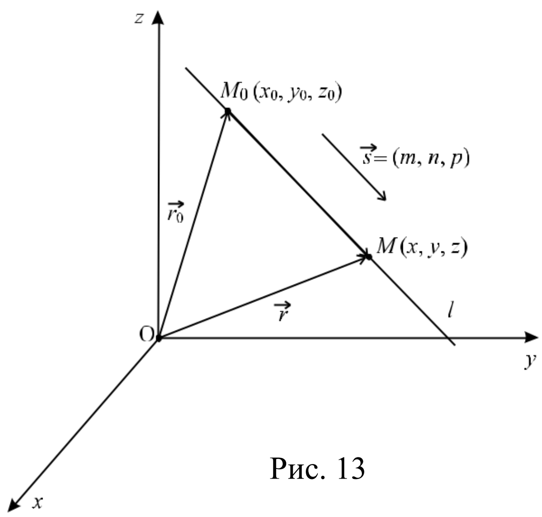

Рис. 13

2. Із рівняння (4) отримуємо три скалярні рівняння:

$$x=x_0+mt,\ y=y_0+nt,\ z=z_0+pt, \tag{5}$$

які називаються *параметричними рівняннями прямої.*

3. Розв'язуючи рівняння системи (5) відносно t та прирівнюючи отримані співвідношення, приходимо до *канонічних рівнянь прямої*:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \tag{6}$$

Якщо $m=0,\ n\neq 0,\ p\neq 0,$ то напрямний вектор $\vec{s}$ перпендикулярний до осі Ox, тому рівняння

$$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

визначає пряму, перпендикулярну до осі Ox. Аналогічно рівняння, в яких лише $n=0$ або $p=0$, визначають прямі, перпендикулярні до осі Oy або Oz.

Якщо $m=n=0,\ p\neq 0,$ або $m=p=0, n\neq 0,$ або $n=p=0, m\neq 0,$ то рівняння (6) визначають прямі, відповідно паралельні осям Oz, Oy, Ox.

4. *Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ записується у вигляді

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (7)$$

5. Дві площини, що перетинаються

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \qquad (8)$$

де $\overrightarrow{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$, $\overrightarrow{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$, $\overrightarrow{n_1}$ не паралельний до $\overrightarrow{n_2}$ однозначно задають пряму. Рівняння (8) називається *загальним рівнянням прямої в просторі*. Напрямний вектор цієї прямої

$$\vec{s} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \qquad (9)$$

а для знаходження координат точки $M_0(x_o, y_o, z_0)$ одну з координат, наприклад $x = x_0$, беруть довільною, а дві інші визначають із системи

$$\begin{cases} B_1y + C_1z = -D_1 - A_1x_0, \\ B_2y + C_2z = -D_2 - A_2x_0. \end{cases}$$

4. Кут між двома прямими

Розглянемо випадки взаємного розташування двох прямих в просторі. Дві прямі в просторі можуть бути мимобіжними або перетинаються, або паралельними, або співпадати. У будь-якому випадку вони утворюють деякий кут (між їх напрямними векторами $\overrightarrow{s_1}$ і $\overrightarrow{s_2}$). Якщо прямі задані канонічними рівняннями:

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \text{ і } \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2} \qquad (10)$$

то величина кута φ між ними визначається за формулою

$$cos\varphi = \frac{\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2}}{|\overrightarrow{s_1}| \cdot |\overrightarrow{s_2}|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \qquad (11)$$

Тепер можна записати *умову перпендикулярності прямих*:

$$\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2} = 0 \text{ або } m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0. \qquad (12)$$

Умова паралельності прямих

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}. \qquad (13)$$

Необхідною і достатньою умовою перетину непаралельних прямих, заданих рівняннями (10):

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (14)$$

Якщо умова (14) не виконується, то прямі (10) є мимобіжними.

Відстань h від точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямої (6), що проходить через точку $M_0(x_o, y_o, z_0)$ у напрямі вектора $\vec{s} = (m, n, p)$, обчислюється за формулою

$$h = \frac{\left|\vec{s} \times \overrightarrow{M_0 M_1}\right|}{|\vec{s}|}. \qquad (15)$$

5. *Кут між прямою і площиною*

Кутом між прямою і площиною називається кут між прямою l і її ортогональною проекцією на площину l' (рис. 14).

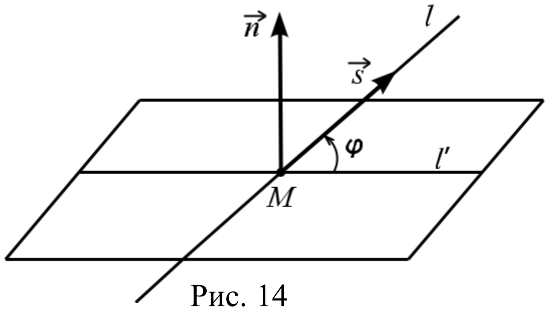

Рис. 14

Величина кута φ між прямою $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ і площиною $Ax + By + Cz + D = 0$ обчислюється за формулою

$$|cos(\widehat{\vec{n}, \vec{s}})| = sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \qquad (16)$$

Умова паралельності прямої і площини: якщо пряма паралельна площині, то вектори $\vec{n}$ і $\vec{s}$ перпендикулярні, тому

$$\vec{n} \cdot \vec{s} = 0 \text{ або } Am + Bn + Cp = 0. \qquad (17)$$

Умова перпендикулярностіі прямої і площини: якщо пряма перпендикулярна площині, то вектори $\vec{n}$ і $\vec{s}$ паралельні, тому

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \qquad (18)$$

Розглянемо детальніше випадки взаємного розташування прямої і площини. Пряма (6) і площина $Ax + By + Cz + D = 0$ можуть перетинатися, бути паралельними або пряма може лежати в площині.

Перейдемо від канонічних рівнянь (6) до параметричних (5) і підставимо значення x, y, z з рівнянь (5) в рівняння площини. Отримаємо рівняння відносно невідомого параметра t:

$$A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0$$

або

$$(Am + Bn + Cp)t + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \qquad (19)$$

Можливі випадки:

а) При $Am + Bn + Cp \neq 0$ рівняння має єдиний розв'язок:

$$t = -Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D/Am + Bn + Cp. \qquad (20)$$

Підставивши це значення t в параметричні рівняння прямої (5), знайдемо координати точки перетину M (рис. 14).

б) При $Am + Bn + Cp = 0$ і $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$ рівняння (19) не має розв'язку, пряма не має спільних точок з площиною.

в) При $Am + Bn + Cp = 0$ і $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ будь-яке t є розв'язком рівняння (19), тобто будь-яка точка прямої належить площині. Це і є *умови приналежності прямої і площини.*