Лекція 3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

План

1. ***Основні поняття***
2. ***Критерій Кронекера-Капеллі***
3. ***Метод Крамера***
4. ***Матричний метод***
5. ***Метод Гаусса***

1. Основні поняття

Розглянемо лінійну систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (1)$$

де a_{ik} $(1 \le i, k \le n)$ − коефіцієнти при змінних, b_i $(1 \le i \le n)$ − вільні члени.

Упорядкована сукупність чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, які перетворюють кожне рівняння системи в правильну числову рівність, тобто задовольняють її, називається *розв'язком системи* рівнянь (1).

Розв'язати систему рівнянь означає знайти всі її розв'язки або довести, що їх не має.

Система називається *сумісною*, якщо вона має принаймні один розв'язок, і *несумісною*, якщо вона не має розв'язків. Сумісна система називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок, і *невизначеною*, якщо вона має безліч розв'язків.

Дві системи називаються *рівносильними (еквівалентними)*, якщо вони мають однакові множини розв'язків.

Визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

називається *визначником системи (1).*

Подамо систему (1) у матричному вигляді. Введемо матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Матрицю A називають *основною* матрицею, а матрицю, яка доповнена вільними членами називають *розширеною* матрицею.

Тоді, згідно з правилом множення матриць, систему рівнянь (1) можна записати одним матричним рівнянням з невідомою матрицею X:

$$A \cdot X = B.$$

При розв'язанні системи рівнянь, як правило, насамперед з'ясовують, чи сумісна вона, й потім вже знаходять усі її розв'язки. Питання про сумісність системи вирішується за допомоги наступної теореми.

2. Критерій Кронекера-Капеллі

Теорема Кронекера-Капеллі. *Система лінійних рівнянь сумісна тоді і лише тоді, коли ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці цієї системи.*

Тоді якщо ранги основної і розширеної матриці не рівні, то система не має розв'язку. Для сумісних систем лінійних рівнянь можливі випадки:

- якщо ранг матриці дорівнює числу невідомих, то система має єдиний розв'язок;
- якщо ранг матриці менший числа невідомих, то система має безліч розв'язків.

3. Метод Крамера

Введемо в розгляд визначники

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix},$$

утворені з визначника Δ заміною відповідних стовпців стовпцем вільних членів системи (1).

Теорема Крамера. *Якщо визначник* Δ *системи (1) відмінний від нуля, то система сумісна і має єдиний розв'язок, що визначається за формулами*

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$$

Ці формули називаються *формулами Крамера.*

Приклад. Знайти розв'язок системи $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y + z = 5 \\ 2y - z = 3 \end{cases}$ лінійних рівнянь методом Крамера.

Розв'язання. Знаходимо визначники $\Delta, \Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}, \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1.$$

Тоді за формулами Крамера

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-2}{-1} = 2, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

4. Матричний метод

Систему рівнянь (1) можна записати одним матричним рівнянням з невідомою матрицею X:

$$A \cdot X = B.$$

Якщо матриця A має обернену A^{-1}, то

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Дана формула називається *матричним записом* розв'язку системи лінійних рівнянь. Отже, щоб розв'язати систему рівнянь, достатньо знайти матрицю, обернену до матриці системи A, і помножити її на матрицю з вільних членів зліва.

Приклад. Знайти розв'язок системи $\begin{cases} x+4y+3z=1 \\ 2x+y \qquad\quad =0 \\ 3x-y+z=1 \end{cases}$ лінійних рівнянь матричним методом.

Розв'язання. Випишемо матрицю даної системи $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Знайдемо визначник матриці A, розклавши його за третім стовпчиком:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-15-7=-22.$$

Так як $\Delta\neq 0$, то існує обернена A^{-1} та шукана матриця має вигляд $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, тобто $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Визначимо A^{-1}, для цього обчислимо алгебраїчні доповнення елементів матриці A,

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=1,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=-7,\qquad A_{31}=\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-3,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-2,\quad A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-8,\qquad A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=6,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-5,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=13,\qquad A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-7.$$

Тоді $A^{-1}=\frac{-1}{22}\begin{pmatrix} 1 & -7 & -3 \\ -2 & -8 & 6 \\ -5 & 13 & -7 \end{pmatrix}$.

Отже, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\frac{-1}{22}\begin{pmatrix} 1 & -7 & -3 \\ -2 & -8 & 6 \\ -5 & 13 & -7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{11} \\ -\frac{2}{11} \\ \frac{6}{11} \end{pmatrix}$.

Звідси $x=\frac{1}{11}, y=-\frac{2}{11}, z=\frac{6}{11}$.

Метод Гаусса

Довільні системи лінійних рівнянь розв'язуються за методом Гаусса (метод послідовного виключення невідомих). Він полягає у тому, що за допомогою елементарних перетворень система зводиться до еквівалентної системи східчастого або трикутного вигляду, з якої послідовно, починаючи з останніх за номером невідомих, знаходимо всі інші невідомі.

Метод Гаусса зручно використовувати, працюючи з розширеною матрицею системи замість самих рівнянь. Стовпець вільних членів міняти місцями з іншими стовпцями розширеної матриці не можна.

<u>*Приклад.*</u> Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 13, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 11, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 6. \end{cases}$

<u>*Розв'язання.*</u> Скористаємось методом Гаусса. Випишемо матрицю коефіцієнтів даної системи та виконаємо елементарні перетворення:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 13 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 10 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 11 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 13 \\ 0 & -3 & -4 & 5 & -16 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & -15 \\ 0 & -2 & -4 & -7 & -20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 13 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & -15 \\ 0 & -2 & -4 & -7 & -20 \\ 0 & -3 & -4 & -5 & -16 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 13 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 13 \\ 0 & -2 & -5 & -6 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 48 \end{array}\right).$$

В результаті одержимо трикутну систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 13, \\ -2x_2 - 5x_3 - 6x_4 = -15, \\ x_3 - x_4 = -5, \\ 15x_4 = 48. \end{cases}$$

Ця система має єдиний розв'язок . Дійсно

$x_4 = \frac{48}{15} = \frac{16}{3}$; $x_3 = -5 + x_4 = -5 + \frac{16}{3} = \frac{1}{3}$; $x_2 = -\frac{1}{2}(5x_3 + 6x_4 - 15) = -\frac{28}{3}$; $x_1 = 13 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = \frac{28}{3}$.

Отже, розв'язком системи є: $x_1 = \frac{28}{3}, x_2 = -\frac{28}{3}, x_3 = \frac{1}{3},\ x_4 = \frac{16}{3}$.

РОЗДІЛ ІІ. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

Лекція 4. Вектори та операції над ними

План

1. Основні поняття

2. Вектори в координатах

1. Основні поняття

Вектором називається напрямлений відрізок, тобто відрізок, для якого вказано початок A і кінець B. Позначення вектора: $\overrightarrow{AB}$ або $\vec{a}$.

Довжиною (модулем) вектора $\overrightarrow{AB}$ називають довжину відрізка, яким він зображається. Позначення: $\left|\overrightarrow{AB}\right|, |\vec{a}|$.

Вектор $\vec{a}$ називається *одиничним*, якщо $|\vec{a}| = 1$. Вектор, початок та кінець якого співпадають, називається *нульовим* вектором. Позначення: $\vec{0}$.

Вектори, що лежать на одній прямій або на паралельних прямих, називаються *колінеарними*. Три вектори, що лежать в одній площині або у паралельних площинах, називаються *компланарними*. Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають *рівними*, якщо вони однаково напрямлені та мають рівні модулі.

Добутком вектора $\vec{a}$ на число t називають вектор $\vec{c}$, що:

1) $|\vec{c}| = |t||\vec{a}|$;   2) $\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{a}$, якщо $t > 0$ та $\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{a}$, якщо $t < 0$.

Сумою векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, проведений з початку вектора $\vec{a}$ до кінця вектора $\vec{b}$, при умові, що кінець вектора $\vec{a}$ співпадає з початком вектора $\vec{b}$ (правило трикутника).

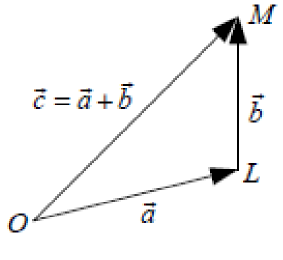

Рис. 2